REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Géométrie, graphiques, fonctions au collège[1]

Régine Douady

regine@douady.net

Résumé : L'apprentissage des mathématiques s'inscrit sur le long terme et en général dans une structure institutionnelle : l'école. L'apprenant construit sa connaissance au fil des années, dans un rapport interactif avec ses enseignants, les autres élèves de sa classe et toutes les autres sources que la vie sociale met à sa disposition.
Dans le texte ci-dessous, nous présentons un ensemble de problèmes dont l'enjeu mathématique est la notion d'*approximation* traitée à un moment de la scolarité : élèves de 12-15 ans, de façon contextualisée. Ce n'est qu'une approche, la question du calcul d'erreur n'est pas abordée. Nombres et mesures y sont impliqués dans différents cadres en interaction : numérique, géométrique, fonctionnel, graphique. Nous y expliquons nos choix didactiques et les raisons des choix de l'ingénierie proposée. La référence est la *dialectique outil/objet* et *jeux de cadres*. Elle nous offre une grille pour élaborer les séquences de classe et aussi pour repérer et analyser les relations entre l'enseignant et les élèves : qui est responsable de quoi, qui fait quoi. L'enseignant a des marges de manœuvre pour organiser et conduire son enseignement, il a des attentes concernant les élèves. Nous y faisons référence.
Mots clés: cadre (géométrique, numérique,…, interaction entre, changement de, jeux de), dialectique outil-objet, ingénierie didactique, méthode, outil (implicite, explicite), problème (sens de, résolution de), variable, variations (étude de).

Geometría, gráficas, funciones en la escuela

Resumen: El aprendizaje de las matemáticas se inscribe en el largo plazo y en generan en una estructura institucional: la escuela. El aprendiz, construye su conocimiento a lo largo de los años, en una relación interactiva con sus profesores, los otros alumnos de su clase y todas las otras fuentes que la vida social pone a su disposición. En el texto que sigue presentamos un conjunto de problemas donde la apuesta matemática es la noción de aproximación tratada en un momento de la escolaridad: alumnos de 12-15 años, de manera contextualizada. No es sino una aproximación, la cuestión del cálculo de errores no es abordada. Números y medidas están allí implicados en los diferentes marcos en interacción: numérico, geométrico, funcional, gráfico. Nosotros explicamos allí nuestras elecciones didácticas y razones de las elecciones de la ingeniería propuesta. La referencia es la dialéctica instrumento-objeto y el juego de marcos. Ella nos ofrece una grilla para elaborar las secuencias de clase y también para informar y analizar las relaciones entre el profesor y los alumnos. Quien es responsable de qué, quién hace qué. El profesor tiene márgenes de maniobra para organizar y conducir su enseñanza, él tiene sus expectativas concernientes a los alumnos. Nosotros hacemos allí referencia.
Palabras Claves: marco (geométrico, numérico,…, interacción entre, cambio de, juego de), dialéctica instrumento-objeto, ingeniería didáctica, método, instrumento (implícito, explicito), problema (sentido de, resolución de), variable, variaciones (estudio de).

Geometry, graphs, functions at school

Abstract

Mathematical learning is a long term process that occurs, usually, in an institutional structure: the school. The student builds his knowledge over the years, in an interactive relationship with his teachers, other students in his class and all the other sources that social life makes available. In this text, we present a set of problems where the mathematical subject is the notion of *approximation*. It is treated at a time of the syllabus: 12-15-year-old students, in a contextualized way. It is only an approach; the question of the error calculation is not addressed. Numbers and measures are there involved in the different frameworks in interaction: numerical, geometric, functional, and graphic. There, we explain our didactic choices and the reasons for the election of the engineering proposed. The reference is the *tool-object dialectic* and the *frameworks interplay*. It offers us a table to elaborate the sequences of class, and also to report and analyze the relations between teacher and students: who is responsible for what, who does what. The teacher has leeway to organize and lead his teaching; he has his expectations concerning students. We make reference here.
Keywords: Framework (geometric, numerical, ..., interaction between, change of, play of), tool-object dialectic, didactic engineering, method, tool (implicit, explicit), problem (meaning, resolution of), variable, variations (study of).

[1] Texto adaptado por Régine Douady de otro ya publicado en el libro *Geometrías Kleinianas* de Maria Judith Alderete, editado por Universidad Nacional de Cuyo – Mendoza. ISBN 978-987- 575- 075- 3. Mendoza. Argentina, 2008.

Recepción:29-05-2011 *Aceptación:30-06-2011*

1. Préambule

Pour développer en mathématiques une connaissance personnelle structurée, active et dynamique, on a besoin au cours de son apprentissage de pouvoir poser des questions, à soi-même et aux autres (enseignants ou autres élèves). Le questionnement provient en général du rapprochement, de la confrontation avec des situations rencontrées auparavant qui ont des ressemblances partielles mais aussi des différences qu'il est nécessaire de comprendre et expliquer.

Dans cette perspective, il est très intéressant que l'enseignant propose à ses élèves des situations problématiques où plusieurs cadres mathématiques sont concernés. La résolution, impossible complètement dans le cadre de l'énoncé, passe par un transfert des énoncés d'un cadre à l'autre, autant que possible sous la responsabilité des élèves. L'intérêt pour eux est de mettre en œuvre un début de recherche qui s'appuie sur des pratiques familières (dessins, calculs, observations…). Ce premier travail peut les amener à remplacer le problème posé par un autre plus simple et qui a les mêmes solutions. Nous marquons là une préoccupation très importante : chercher à *réduire la complexité* d'un problème. Et cela peut faire l'objet d'un apprentissage. Il s'agit souvent de repérer et faire jouer des propriétés de la situation. Les transferts d'énoncés et de résultats partiels d'un cadre à un autre cadre facilitent cela. A chaque étape, des éléments connus (théorèmes ou méthodes) sont utilisés, puis par transfert inverse, des questions se posent et l'on obtient en les résolvant des résultats nouveaux. Ainsi, le travail dans chacun d'eux est une **source d'interrogations** et un **outil de contrôle** du travail dans chacun des cadres sollicités, chacun ayant ses modes propres de fonctionnement. Les interactions entre cadres doivent fournir des résultats cohérents.

Un tel mode de travail est une éducation à la souplesse de pensée indispensable, dans tout apprentissage, à la recherche de cohérences d'autant plus fructueux et efficace qu'il y a familiarité avec ce mode. C'est un gage de sa qualité et de sa pertinence pour les apprentissages ultérieurs. On n'a jamais fini d'apprendre.

2. Introduction aux problèmes

2.1 Intérêt des changements de cadres

Les problèmes qui suivent s'inscrivent dans la perspective de travail indiquée ci-dessus. Ils s'adressent à des élèves de 12-15 ans (collège) et nécessitent des connaissances de l'école primaire : rectangles, leurs deux dimensions, périmètre et aire. La nouveauté et la difficulté viennent du fait qu'on veut étudier les *variations* de certaines mesures en fonction d'autres. Autrement dit, on veut introduire un point de vue fonctionnel dans une situation particulière, sans attendre que les fonctions soient abordées comme objet mathématique.

Les raisonnements et les modes de validation sont différents selon le cadre où l'on étudie ces variations. Par exemple, si une variable ne prend que des valeurs entières, on peut faire une étude complète pour chaque valeur entre deux valeurs données de la variable. Ce n'est pas le cas si ces valeurs sont des mesures de longueurs : entre 2 longueurs différentes, on peut toujours en intercaler une troisième, si petite que soit la différence entre les longueurs données.

2.2 Une méthode

Transférer un problème d'un cadre à un autre cadre est un moyen pour les élèves de prendre conscience des propriétés des notions mathématiques dans chacun d'eux et de la façon dont elles interviennent dans les raisonnements. C'est un moyen pour les enseignants de travailler avec les élèves la question de la *cohérence* des résultats obtenus par différentes voies. C'est un moyen de mettre l'accent sur la nécessité d'expliquer des résultats contradictoires et éventuellement de repérer des erreurs, En cherchant à en comprendre les raisons, les chances de les corriger durablement augmentent. Mais ce peut être aussi une contradiction entre ce qui est attendu et ce qui est observé qui doit être expliquée. La conséquence peut être de poser de nouvelles hypothèses et de réorienter la recherche.

La capacité des élèves à réinvestir leur réflexion et leurs nouvelles connaissances dans des nouveaux problèmes augmente aussi. On peut penser qu'ils pourront *unifier et généraliser* des propriétés rencontrées dans plusieurs problèmes particuliers.

Les *représentations graphiques* jouent un rôle très important dans cette étape. Elles permettent de regrouper et organiser des informations qui *font sens* pour les élèves, et en même temps elles sont un relais dans la démarche pour *oublier le sens*. Par exemple, les techniques algébriques ont leur mode de validation propre. Elles permettent de résoudre des problèmes non algébriques, mais qui ont reçu une modélisation algébrique. Leur efficacité est liée à l'oubli du sens des problèmes.

Les *interactions entre cadres* sont une pratique courante en mathématiques, un moteur de la création de nouveaux objets. Elles sont, pour les élèves qui les pratiquent (je dis : changements de cadres) et pour les enseignants qui les organisent volontairement (je dis : jeux de cadres), un moyen d'articuler et de faire dialoguer *l'ancien et le nouveau*. Sans articulation et dialogue, il n'y a pas de progrès durable de l'apprentissage.

3. ingénierie didactique

3.1 Des problèmes

L'élaboration d'un problème est un pas dans une ingénierie didactique. Le terme *ingénierie didactique* désigne un ensemble de séquences de classe conçues, organisées et articulées dans le temps de façon cohérente par un *maître-ingénieur* pour réaliser un projet d'apprentissage d'un certain contenu mathématique, pour une certaine population d'élèves. Au cours des échanges entre l'enseignant et les élèves, le projet évolue sous les réactions des élèves et en fonction des choix et décisions du maître.

Ainsi, l'ingénierie didactique est à la fois un *produit* : résultat d'une analyse a priori, et un *processus* : résultat d'une adaptation à la mise en œuvre du produit dans des conditions dynamiques de classe.

Les énoncés choisis ci-dessous – données et questions – comme les stratégies de résolution vont faire interagir trois *cadres* : géométrie avec mesures, nombres, fonctions (comme outil implicite et non comme objet de savoir), avec leur représentation graphique cartésienne, i.e, dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires, gradués. Il s'agit d'*étudier les variations de variables liées par une relation et à cette occasion d'approcher numériquement un nombre irrationnel* (qui existe pour l'enseignant mais non pour les élèves) *dont la signification (*pour les élèves) *provient de la géométrie.*

Dans le *cadre géométrique*, les problèmes s'adressent à des élèves qui savent ce qu'est un rectangle : un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux et de même longueur et qui a un angle droit, ce qui entraîne que les 4 angles sont droits. Ils savent calculer le périmètre et l'aire d'un rectangle en fonction de ses dimensions. Ils savent utiliser des lettres pour écrire des formules ou des relations entre les mesures. Ils ont déjà eu l'occasion de calculer une mesure inconnue désignée par une lettre en se servant de formules ou relations où les autres mesures sont connues.
En choisissant une unité de longueur et l'unité d'aire associée (par exemple cm et cm^2), l'étude des mesures et de leurs variations selon les contraintes se fait dans le cadre numérique et donne lieu à des relations qu'on peut représenter graphiquement.
Dans le *cadre numérique*, les élèves sont familiers avec les opérations sur les nombres naturels et ont des connaissances sur les nombres décimaux ou les petites fractions. Aucune connaissance des irrationnels n'est nécessaire bien sûr.
Du point de vue *graphique*, ils savent graduer des axes et représenter des couples de nombres (x, y).
Du point de vue *algébrique*, à l'occasion de petits problèmes concrets divers, il s'agit de familiariser les élèves avec une pratique précieuse et même indispensable : désigner par des lettres des valeurs numériques inconnues dans des contextes chargés de sens pour les élèves, en particulier géométriques, et écrire des relations, bien sûr attachées au contexte, qui conjuguent des lettres et des nombres.

3.2 Questionnement et choix de l'enseignant

Nous énonçons ci-dessous des problèmes où interviennent des *paramètres* dont les valeurs sont au choix de l'enseignant. Celui-ci fixe ces valeurs et organise la gestion matérielle de la situation en fonction de ses objectifs et de ce qu'il pense que les élèves peuvent faire ou apprendre :

- quel est l'enjeu de la situation pour les élèves - une nouvelle connaissance, une nouvelle méthode, la mise en oeuvre de quelque chose déjà appris, la coordination dans une situation complexe d'éléments appris séparément... ?

- quelles procédures veut-il privilégier? Quels comportements veut-il provoquer - initiative, contrôle de validité, recherches de cohérence ? Quels moyens donne-t-il pour cela à ses élèves ?

- quels moyens se donne-t-il
  - pour repérer les comportements effectifs des élèves, pour expliquer les éventuels décalages entre ceux qu'il attend et ceux qu'il observe ?
  - pour évaluer les connaissances des élèves en termes d'objets (ils savent énoncer un théorème, une méthode et l'appliquer à la demande) et en termes d'outils disponibles (ils prennent l'initiative de s'en servir dans de nouveaux problèmes où ces outils sont adaptés, sans que l'énoncé ou l'enseignant ne le leur suggère) ?

Selon ses objectifs, l'enseignant décide si les élèves vont travailler de façon individuelle ou en groupe ou en situation de communication émetteur-récepteur. Il choisit les formes d'exploitation des travaux de chacun : échange, confrontation, diffusion, reprise collective. Il lui faudra peut-être modifier ses prévisions, apporter des compléments, faire des reprises avant d'institutionnaliser ce qui pour lui était l'enjeu de la situation d'enseignement.

4. Raisons du choix de ces problèmes

4.1 A propos des nombres et grandeurs

Les nombres entiers naturels (0, 1, 2, 3, …) servent à compter des objets. Il est assez remarquable que le même système de nombres permette de compter des pommes, des vers dans un poème, ou des gens.
Pour mesurer, on utilise les nombres réels**.** Il est tout à fait remarquable que le même système de nombres permette de mesurer les longueurs, les durées, les poids…
Pour repérer un point sur une droite, ou pour mesurer les variations d'une grandeur, on est amené à introduire les nombres négatifs.

La donnée d'un nombre réel repose sur la fiction d'un développement décimal illimité, d'une précision infinie, d'une quantité infinie d'information. Dans la réalité, on travaille sur des approximations.

4.2 Les choix

Les élèves ont en principe quelques connaissances sur les petites fractions et les décimaux. Peuvent-ils s'en servir comme outils pour approcher d'aussi près qu'on veut des mesures d'un type encore inconnu d'eux : des mesures irrationnelles ?

Le travail s'adresse à de jeunes élèves. L'objectif n'est pas d'approcher des nombres irrationnels par des rationnels directement dans le cadre numérique, ni même de prononcer le mot. Il s'agit que les élèves prennent conscience d'une difficulté : celle de mesurer exactement certaines quantités, et d'une nécessité : celle d'en faire des mesures approchées. Ainsi, nous introduisons un contexte non numérique où les éléments correspondant à des mesures irrationnelles existent et ont du sens pour eux. D'où le choix de grandeurs géométriques.

Nous pensons que la notion d'approximation et de contrôle de l'erreur dans les mesures est fondamentale et doit faire partie des enseignements de base.

Le projet est de mettre à l'œuvre des interactions entre cadres différents dans lesquels les élèves ont des connaissances partielles et en correspondance imparfaite d'un cadre à l'autre et de montrer la fécondité scientifique d'un tel travail, notamment en cherchant à étendre les correspondances entre cadres.

Les variations de mesures sont au coeur du problème. Nous avons besoin de représenter ces variations pour les interpréter, pour suggérer des choix de calculs et contrôler les résultats. Nous choisissons des représentations graphiques cartésiennes :

- un point représente un rectangle, un ensemble de points représente une situation géométrique compliquée.
- un examen géométrique du graphique peut suggérer des réponses aux questions du problème ou au moins des conjectures à étudier par d'autres moyens.

Le contexte des problèmes choisis est familier, addition et multiplication de petits nombres entiers, très simple techniquement où se posent de sérieux problèmes mathématiques, accessibles aux élèves, notamment existence et unicité d'une solution.
Ces questions vont confronter les élèves à la nécessité de prouver pour convaincre.
Remarque : avec de grands nombres entiers ou des fractions ou décimaux dans les énoncés on augmenterait la difficulté technique sans bénéfice pour le raisonnement mathématique. Sauf si on veut profiter du problème pour faire calculer.

4.3 Problèmes

Nous choisissons de travailler sur des rectangles**.** A chacun d'eux, quatre mesures sont associées : celles des côtés, le périmètre et l'aire. En fixant une de ces mesures, trois restent variables sous contrainte. On veut en étudier les variations.

Selon les contraintes, on sera conduit à des problèmes d'existence et d'unicité dans un triple contexte géométrique, numérique, graphique.

Les problèmes qui nous intéressent sont posés en termes géométriques. Mais ils reçoivent immédiatement une traduction algébrique où il revient au même de s'intéresser au périmètre ou au demi-périmètre, ce qui simplifie la recherche.

Comme nous l'avons remarqué plus haut, quand on cherche à résoudre un problème, un premier travail essentiel est de remplacer une question par une autre techniquement plus simple, mais qui n'enlève rien à la généralité du problème. C'est un travail de longue haleine, qui demande à être renouvelé à plusieurs occasions, car il s'agit d'une attitude scientifique. C'est un premier résultat d'apprentissage de méthode pour les élèves. Et ce souci peut commencer très tôt, dès le collège et même dès l'école primaire.

I On s'intéresse à la famille R des rectangles de périmètre fixé 30 cm. On note a et b les deux dimensions.

1) Proposer 5 rectangles différents de cette famille. Pour chacun, calculer leur aire en cm^2.

2) Les unités de longueur et aire étant fixées, on s'intéresse à leur mesure. On nommera encore dimensions, périmètre et aire leur mesure qui sont donc des nombres.

A chaque rectangle proposé en 1) correspond un couple (a,b). Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires, gradués,

- marquer les 5 points de coordonnées (a,b) proposés en 1)
- indiquer à côté de chacun d'eux l'aire correspondante.
- ordonner les couples (a,b) par ordre croissant de l'aire du rectangle correspondant.

3) On veut marquer en rouge le plus possible de points M (x,y) du plan qui représentent un rectangle de dimensions (x,y) de la famille R.

Trouver une règle, la plus simple possible, qui permette de savoir si un point va être marqué en rouge ou non.
Enrichir l'ensemble des points déjà marqués en rouge, indiquer, à côté, l'aire correspondante.

Deux points différents du graphique marqués en rouge peuvent-ils correspondre à un même rectangle du cadre géométrique ? A quoi reconnaît-on que deux rectangles sont différents ? Décrire géométriquement l'ensemble des points rouges.

4) L'objectif de cette question est de savoir si, dans R , on peut trouver un rectangle dont l'aire soit maximum (cela veut dire que tout autre rectangle de la même famille que celui-là a une aire plus petite).
On note A l'aire d'un rectangle.

Pour un rectangle de dimensions (a,b) , l'aire $A = a\times b$
- Représenter graphiquement tous les couples (a,A) correspondant à des rectangles de R et où a est un nombre entier. (On choisira sur les axes des unités de graduation qui le permettent). Marquer en bleu ces points.

- Enrichir cet ensemble de points en choisissant des valeurs non entières pour a.
- Soit M un point de coordonnées (x,y) , On le marque en bleu si x est une dimension d'un rectangle de R et y son aire. Décrire géométriquement cet ensemble de points bleus.

5) Dessiner un rectangle de R de dimensions choisies a et b et un autre rectangle de R de dimensions a + h et b - h où h est une petite quantité.
Comparer géométriquement les aires.

- En examinant les deux graphiques, bleu et rouge, proposer un candidat pour être un rectangle de R d'aire maximum.
- Est-il possible de trouver dans R un rectangle d'aire plus grande que celle du carré de R. Raisonner géométriquement. (On rappelle qu'un carré est un rectangle particulier).

II On s'intéresse à la famille S des rectangles d'aire fixée 60 cm^2.

On se propose de faire un travail analogue au travail fait en **I** où le périmètre était fixé. On note a et b les deux dimensions comme précédemment.

1) Proposer 5 rectangles différents de cette famille. Pour chacun, calculer leur demi-périmètre en cm.
A chaque rectangle proposé en 1) correspond un couple (a,b).
Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires, gradués,

- marquer, en noir, les 5 points de coordonnées (a,b) proposés en 1)
- indiquer à côté de chacun d'eux le demi-périmètre du rectangle correspondant.
- ordonner les couples (a,b) par ordre décroissant de ce demi périmètre.

2) Enrichir l'ensemble des points M (x,y) du plan qui représentent un rectangle de dimensions (x,y) de la famille S , déjà marqués en noir.
Marquer d'une couleur différente les points du plan correspondant à des rectangles d'aire A > 60 et avec une troisième couleur ceux correspondant à des rectangles d'aire A < 60 . Marquer le plus possible de points noirs.
3) Sur un nouveau graphique, on marque en bleu un point M (x,y) si x est une dimension d'un rectangle de S et y son demi périmètre. Décrire géométriquement cet ensemble de points bleus.

4) En rapprochant les informations fournies par les graphiques bleu et noir, proposer un candidat pour être un rectangle de S de périmètre minimum. Justifier géométriquement le choix.

III On s'intéresse aux rectangles dont on fixe à l'avance le périmètre **et** l'aire.
Est-ce toujours possible de trouver un tel rectangle ?
Quand c'est possible, la solution est-elle unique ?
Remarque
Mathématiquement, on sait que selon les valeurs entières (resp. rationnelles) choisies pour les dimensions a et b , trois cas peuvent se produire :

- il existe une solution et les dimensions du rectangle sont entières (resp. rationnelles).
- il existe une solution et les dimensions du rectangle sont irrationnelles
- il n'existe pas de solution

Nous allons envisager les 3 cas.

La résolution est immédiate dans **R** pour des élèves qui savent résoudre des équations polynomiales du second degré et qui connaissent les relations entre les coefficients et les racines. Il s'agit alors de résoudre l'équation
$x^2 - S x + P = 0$ où S désigne la somme des racines et P leur produit.
Mais les élèves auxquels on s'adresse ici n'ont pas ces connaissances et ce n'est pas l'objectif de les leur enseigner. En revanche, on leur propose une situation de recherche riche et qu'ils peuvent aborder avec des moyens simples. On fixe des unités de longueur et aire comme précédemment. Etant donné un rectangle de dimensions a et b on lui associe deux autres nombres :

La mesure p = a + b de son demi périmètre et A = a×b celle de son aire.

1) Chercher les dimensions d'un rectangle tel que
p = 12 et A = 35

Donner si possible les dimensions exactes. Sinon, donner des dimensions approchées au dixième, au centième, au millième.

2) Même question pour p = 12 et A = 30

3) Même question pour p = 12 et A = 40

4) On représente sur un même graphique dans 4 couleurs différentes
- les couples (a,b) tels que p = 12
- les couples (a,b) tels que A = 30
- les couples (a,b) tels que A = 35
- les couples (a,b) tels que A = 40

En examinant et en comparant les 4 ensembles, peut-on suggérer une condition sur des nombres x et y pour que le quadruplet (x, y, x+y, x×y) corresponde aux 2 dimensions, demi périmètre et aire d'un rectangle.

5) On s'intéresse aux couples de nombres (p,A) associés à un rectangle. Représenter graphiquement de tels couples en portant p en abscisse sur l'axe Ox et A en ordonnée sur l'axe Oy. Les marquer en noir.

Marquer en rouge le plus possible de points dont les coordonnées (x,y) ne correspondent pas au demi périmètre et à l'aire d'un même rectangle.

Décrire si possible la frontière entre l'ensemble des points marqués en rouge et ceux marqués en noir.
Les points frontière sont-ils rouges ? noirs ? tantôt rouges, tantôt noirs ? ou ni l'un ni l'autre ?

Proposer une relation algébrique entre x et y qui les caractérise.

5. Analyse didactique

L'analyse qui suit s'adresse aux enseignants ou aux formateurs. En décrivant les enjeux mathématiques et didactiques possibles, l'enseignant peut envisager différents scénarios d'enseignement et faire ses choix en fonction de ce qu'il veut que ses élèves apprennent.

Reprenons le problème avec les notations précédentes : *chercher un rectangle dont on fixe à l'avance l'aire et le périmètre.*

Cela revient à *chercher deux nombres dont on connaît la somme* p *et le produit A*.

Une méthode : on choisit deux nombres a et b tels que
a + b = p et on calcule a × b
* si a × b = *A* , le problème est résolu
* sinon, on choisit un autre couple (a,b) " meilleur" et d'autres encore "meilleurs"
C'est-à-dire vérifiant a + b = p et tel que le produit a × b soit plus proche de *A*, de plus en plus proche de *A*.
Alors, soit on aboutit effectivement à *A*, soit on se rapproche de *A*, l'écart à *A* diminue et devient de plus en plus proche de 0, soit les valeurs semblent plafonner
et *A* reste inaccessible.

Les **cadres** qui interviennent dans l'étude

- Le cadre *géométrique* : rectangles, côtés, longueur des côtés i.e dimensions, périmètre et aire sont des *objets mobilisés* directement (périmètre, aire) ou indirectement (dimensions) dans l'énoncé.
- Le cadre *algébrique* est un cadre auxiliaire de travail : équations, inconnues, solutions d'une équation, système d'équations sont des outils implicites pour *formuler autrement* le problème.
- Le cadre des *fonctions* : la variation de deux variables liées par une relation et la détermination de deux variables liées par deux relations correspondent à des *études intermédiaires* pour traiter le problème dans sa formulation algébrique.

La représentation *graphique* permet une modélisation géométrique par un ensemble de points, des problèmes posés. Certains outils de la géométrie : alignement de points, symétrie de la configuration, intersection de courbes sont adaptés à la situation.

- Le cadre *numérique* : entiers, certaines fractions, décimaux, munis de l'ordre et des opérations sont les *outils explicites de base* pour toutes les étapes de l'étude quel que soit le cadre où elle se situe.

5.1 Les **outils**

En plus de ceux qui correspondent aux connaissances supposées chez les élèves et mentionnées plus haut, d'autres éléments interviennent :

- une *connaissance* dans le cadre numérique :
  entre deux nombres décimaux, il y a d'autres décimaux et un procédé pour en désigner.
- une *pratique* dans le cadre graphique :
  la représentation des couples (x,y) pour lesquels une relation existe entre les coordonnées x et y , par exemple : la somme x + y est constante ou bien le produit x × y est constant, les représentations étant sur graphiques séparés ou sur un même graphique selon les besoins du problème.
- un *résultat mathématique :*
  parmi les rectangles de périmètre fixé, le carré est celui qui a la plus grande aire.

C'est un théorème du cadre géométrique qui peut être un résultat de la recherche, un savoir que les élèves peuvent réinvestir dans d'autres problèmes. Pour ceux des élèves qui sauront s'en servir, il fera partie de leur champ de connaissances.

- *un outil implicite* dans le cadre des fonctions : *le théorème des valeurs intermédiaires*
  la fonction qui aux deux dimensions d'un rectangle fait correspondre son aire a la propriété suivante : "parmi les rectangles de périmètre fixé, si l'un des rectangles a une aire *A* plus petite qu'une valeur visée et un autre une aire *A*' plus grande que cette valeur visée, alors il existe un rectangle dont l'aire est égale à la valeur visée".
- *Une méthode* à établir pour essayer d'atteindre la valeur visée : parmi les rectangles de demi périmètre p , chercher des rectangles dont l'aire est de plus en plus proche de *A* . Pour cela, choisir des couples (x,y) qui vérifient x + y = p , calculer le produit x × y . Parmi ces couples, chercher à en sélectionner deux dont les produits encadrent *A*. Si c'est possible, sélectionner de nouveaux couples dont les produits encadrent *A* de façon plus étroite, de plus en plus étroite…Or cette sélection n'est pas facile à faire, la variable sur laquelle il est pertinent d'agir n'est pas visible.

Problème de méthode : comment les sélectionner ?

De quels moyens disposent les élèves pour déterminer, à partir de leurs connaissances, un algorithme de sélection ?

- *Une question* : est-il possible d'atteindre *A* ? Sous quelles conditions ?

La réflexion géométrique sur les représentations graphiques réalisées et sur les figures de rectangles de la situation a un plein rôle à jouer.

6. Les marges de manœuvre de l'enseignant

L'enseignant a le choix des valeurs numériques de p et *A*. Il a aussi le choix de l'organisation du travail en classe : en équipes de 2, en groupes de 3 ou 4. Il peut choisir de donner le même travail, mêmes valeurs numériques des périmètres et aire, à tous les groupes et les élèves se répartissent le travail de recherche ou au contraire il peut répartir le travail avec des valeurs numériques différentes suivant les groupes.
Dans tous les cas, le *bilan* est une étape essentielle dans la compréhension du sujet. Il est important que chaque élève prenne connaissance du travail des autres et situe son travail par rapport à celui des autres. L'enseignant qui conduit le bilan peut accorder plus ou moins de place aux débats entre élèves avant d'en assurer la synthèse.

Il a la responsabilité d'*institutionnaliser* ce que les élèves doivent retenir et qui va faire partie de leur bagage mathématique. C'est un moment clé, les connaissances personnelles des élèves, diverses de l'un à l'autre, acquises au cours du travail sont triées, sélectionnées. Elles sont homogénéisées et organisées en un savoir cohérent, exprimées dans un vocabulaire officiel. Ainsi se constitue un savoir de la classe qui devient *légitime*, une référence à laquelle tous ont droit.

Le cours en bonne et due forme par l'enseignant est indispensable après le bilan pour fixer ce qu'il faut retenir et donner aux *outils* le statut d'*objet*, Le cours arrive alors en écho à des connaissances partielles sur le sujet, aide à établir de la cohérence en même temps qu'il les généralise.
Si ce travail n'est pas fait ou fait trop tôt, beaucoup d'élèves risquent de perdre le bénéfice du travail de recherche et l'enseignant risque d'avoir perdu du temps. S'il est fait à un moment adéquat pour l'ensemble des élèves, et c'est la grande difficulté, on peut espérer alors que les élèves qui se sont familiarisés avec ces nouvelles connaissances pourront s'en servir pour traiter de nouveaux sujets et les *réinvestir* dans de nouveaux problèmes.

L'hétérogénéité des élèves conduit à accorder une grande importance à des *phases de rappel* où une attention différenciée est apportée aux différents élèves.

L'enseignant a aussi le choix du travail d'*application* à donner aux élèves en classe ou à la maison après la synthèse et l'institutionnalisation. L'apprentissage se fait rarement en un coup. L'entraînement est une composante importante de la familiarisation et de l'acquisition de compétences techniques, d'autant plus efficace qu'il se fait à un moment où les élèves en comprennent les raisons.
Si l'enseignant a une responsabilité majeure dans la conduite de son enseignement, il a aussi la charge de déléguer aux élèves une certaine part d'initiative et de responsabilité.
Si les élèves ont été mis en situation d'apprendre, s'ils ont agi, peut-on dire qu'ils savent ?
L'enseignant observera avec intérêt ce que les élèves feront quand ils seront confrontés à de *nouveaux problèmes.*

7. Ce qu'on attend des élèves

Les attentes sont de plusieurs ordres : attitude scientifique, méthodes, connaissances.
Dans les situations mathématiques présentées, l'accent est mis sur l'importance de la construction du sens pour capitaliser du savoir. Dans ce but, enseignants et élèves sont mis en situation d'avoir à prendre des initiatives et des responsabilités. Il peut arriver que les élèves se trompent, qu'ils fassent de mauvais choix et qu'ils soient confrontés à des échecs. C'est le risque de l'incertitude. Mais ils avancent en recherchant les raisons de leur échec. Il arrive que cela les conduise à prendre conscience qu'ils avaient fait implicitement des choix et qu'ils auraient pu en faire d'autres. C'est, dans un contexte limité, contrôlé et sans risque de graves conséquences, l'occasion de prendre conscience de l'importance du doute, d'apprendre à assumer les conséquences de ses choix, à les modifier, à en faire de meilleurs en fonction du but visé.
On attend qu'ils aient constamment le souci de contrôler la validité de ce qu'ils avancent. Les graphiques et les changements de cadres, dans la mesure où ils en ont une pratique familière, doit les aider.
On attend qu'ils aient acquis de la familiarité avec les outils mentionnés plus haut. Certains outils auront été explicités, institutionnalisés, d'autres resteront encore en l'état d'un usage implicite en attendant le bon moment pour les expliciter et leur donner un statut d'objet.
On attend aussi de la pratique des changements de cadres, qu’elle les aide à s'exprimer dans différents langages entre lesquels ils peuvent établir des correspondances. Cela fait partie de l'éducation mathématique certes, mais c'est aussi une éducation citoyenne dans le monde multiculturel dans lequel on évolue.

8. Conclusion

Nous avons donné des exemples de mise en œuvre de la *dialectique outil/objet* et de *jeux de cadres.*

Il est clair cependant que la réalisation d'un tel processus d'enseignement-apprentissage dépend des contraintes sociales et institutionnelles auxquelles sont soumis les enseignants et les élèves. Une adaptation en situation est inévitable. Par ailleurs, les sujets à traiter ne relèvent pas tous d'un tel processus : les problèmes pertinents peuvent être trop complexes pour une ingénierie compatible avec les contraintes scolaires, on peut aussi prévoir d'accroître les exigences dans le temps et à un moment donné se contenter d'apporter des éléments d'information. Mais en toute situation et à tous les niveaux, les interactions entre cadres présentent de l'intérêt, avec d'autant plus d'acuité qu'elles font partie des habitudes de pensée et des formes de travail.

8. Références

Artigue, M. (1990) Ingénierie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9.3 , 281-307.

Broussseau, G. (1980) Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 1.1, 11-59.

Douady, R. (1980) Approche des nombres réels, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 1.1, 77-110.

Douady, R. (1987) L'ingénierie didactique un instrument privilégié pour une prise en compte de la complexité de la classe, *Actes du Congrès PME XI*, Montréal juillet 1987, 222-228.

Douady, R (1988) Dialectique outil-objet et jeux de cadres *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7.2, 5-31.

Douady, R. (1999) Fonction relation / algebra : un exemple au secondaire (age 15-16) *Actes CERME1*, Osnabruck 1999, vol.1, 113-124.

Lakatos, I. (1977) Proof and refutations the logic of mathematical discovery. Cambridge, USA: Cambrige University Press.