20 AÑOS REIEC NIECYT UNICEN

REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Número especial - 20 Años REIEC

La modelización matemática en el aula multigrado rural, cuando las matemáticas van al campo

Miguel Ángel Rodríguez Mejía[1], Avenilde Romo Vázquez[2]

rodr1190@msu.edu , avenilde.romo@cinvestav.mx

[1]*College of Natural Science, Michigan State University, 288 Farm Lane, Michigan, Estados Unidos de Norteamérica.*
[2] *Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, Av. IPN 2508, Ciudad de México, México.*

Resumen

Se presenta una investigación que tuvo por objeto introducir una actividad de modelización matemática en una escuela rural multigrado colombiana, como alternativa frente al escaso sentido que el estudiantado atribuía a la escuela en general y a la clase de matemáticas en particular. Para ello, se diseñó e implementó un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) enmarcado en el paradigma del Cuestionamiento del Mundo (Chevallard, 2013). La implementación y el análisis de los REI producidos por los estudiantes permitieron identificar y describir la evolución de la actividad de modelización desde una perspectiva ecológica, atendiendo a las funciones didácticas de mesogénesis, topogénesis y cronogénesis. A partir de estos resultados, se reflexiona sobre las condiciones que hacen viable una actividad de modelización matemática en el contexto escolar rural, así como sus posibilidades, desafíos y contribuciones a una enseñanza de las matemáticas que reconoce y honra el territorio e invita a aprender en comunidad.

Palabras clave: educación multigrado, teoría antropológica de lo didáctico, modelización matemática, praxeología, recorrido de estudio e investigación.

Mathematical modeling in rural multigrade classrooms: When mathematics moves to the countryside

Abstract

This paper presents a study aimed at introducing a mathematical modeling activity in a multi-grade rural Colombian school as an alternative to the lack of meaning students attributed to schooling in general and to mathematics classes in particular. To this end, a Study and Research Path (SRP) was designed and implemented, within the counter-paradigm of Questioning the World (Chevallard, 2013). The implementation and analysis of the SRP made it possible to identify and describe the evolution of the modeling activity from an ecological perspective, focusing on the didactic functions of mesogenesis, topogenesis, and chronogenesis. On this basis, we reflect on the conditions that make mathematical modeling viable in rural school contexts, as well as on its possibilities, challenges, and contributions to a mathematics education that recognizes and values the territory and invites learning in community.

Keywords: multigrade education, Anthropological Theory of the Didactic, mathematical modelling, praxeology, Study and Research Path

La modélisatio mathématique en clase rurale multigrade: lorsque les mathématiques vont aux champs

Résumé

Cet article présente une recherche visant à introduire une activité de modélisation mathématique dans une école rurale colombienne à classes multigrades, comme alternative au manque de sens que les élèves attribuaient à l’école en général et à l’enseignement des mathématiques en particulier. À cette fin, un Parcours d’Étude et de Recherche (PER) a été conçu et mis en œuvre dans le cadre du contreparadigme du Questionnement du Monde (Chevallard, 2013). La mise en œuvre et l'analyse du PER ont permis d'identifier et de décrire l'évolution de l'activité de modélisation selon une perspective écologique, en s'intéressant aux fonctions didactiques de la mésogenèse, de la topogenèse et de la chronogenèse. À partir de ces résultats, nous proposons une réflexion sur les conditions rendant viable la modélisation mathématique dans le contexte scolaire rural, ainsi que sur ses possibilités, ses défis et ses apports à un enseignement des mathématiques qui reconnaît et valorise le territoire et invite à apprendre en communauté.

Mots clés: classes multigrades, Théorie Anthropologique du Didactique, modélisation mathématique, praxéologie, Parcours d'Étude et de Recherche

Modelagem matemática em salas de aula multisseriadas rurais: Quando a matemática se desloca para o campo

Resumo

Este artigo apresenta um estudo que teve como objetivo introduzir uma atividade de modelagem matemática em uma escola rural multisseriada colombiana como alternativa à falta de sentido que os alunos atribuem à escolarização em geral e às aulas de matemática em particular. Para tanto, foi elaborado e implementado um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), dentro do contraparadigma de Questionar o Mundo (Chevallard, 2013). A implementação e análise do PEP possibilitaram identificar e descrever a evolução da atividade de modelagem a partir de uma perspectiva ecológica, com foco nas funções didáticas de mesogênese, topogênese e cronogênese. Com base nisso, refletimos sobre as condições que tornam a modelagem matemática viável em contextos escolares rurais, bem como sobre suas possibilidades, desafios e contribuições para uma educação matemática que reconheça e valorize o território e convide à aprendizagem em comunidade.

Palavras-chave: educação multisseriada, Teoria Antropológica da Didática, modelagem matemática, praxeologia, Percurso de Estudo e Pesquisa

1. INTRODUCCIÓN

En Colombia existe una serie de alternativas pedagógicas orientadas a garantizar el acceso y la permanencia en el sistema educativo de grupos históricamente marginados. Dentro de estos grupos se encuentran la infancia y la juventud campesinas, cuya vulnerabilidad es evidenciada cada vez que se comunican datos comparativos del sector educativo. Por ejemplo, en el informe "Características y retos de la educación rural en Colombia" (Pontificia Universidad Javeriana, 2023), se subrayan disparidades entre lo urbano y lo rural en aspectos como las tasas de alfabetización, niveles de deserción, el acceso a la educación postsecundaria, la cobertura global, entre otros. Para atender a estas problemáticas históricas, desde el Ministerio de Educación Nacional (MEN) se concibe la postprimaria rural como un modelo educativo flexible, que posibilita que jóvenes campesinos y campesinas puedan asistir a las aulas (MEN, 2010). Sin embargo, la deuda histórica con la escuela rural persiste. En parte, debido a que se persigue un modelo educativo nacional fundamentado en una política de competencias (MEN, 2006), que niega espacio a la particularidad de los territorios. Se plantean objetivos instruccionales globales a manera de estándares, que difícilmente se alcanzan debido a las condiciones materiales de la educación rural. Esto se traduce en una brecha persistente entre el campo y la ciudad relativa al logro de dichos estándares. Por ejemplo, los datos históricos de las pruebas SABER 11 de egreso del bachillerato muestran que para el 2024 la media nacional rural (235,2 de 500) sigue siendo inferior a la media urbana registrada en el 2020 (252,6) (Observatorio ExE, 2024; Universidad Javeriana, 2024). De manera que desarrollar investigación educativa enmarcada en la ruralidad colombiana resulta pertinente, en aras de contribuir al fortalecimiento de la escuela campesina.

Con base en el cotexto descrito anteriormente, se propone esta investigación, originada en un problema docente, enfrentado por un maestro de matemáticas en una secundaria rural localizada en el nororiente de Colombia: cómo conectar las matemáticas escolares con la realidad rural, que, entre otros objetivos, pretendía atenuar el riesgo de deserción para algunos estudiantes. Este problema docente se convirtió en un problema de investigación (Gascón, 2011), al enfocarlo en determinar las condiciones institucionales que permiten integrar una actividad de modelización que dé sentido al estudio de una cuestión en un aula rural, bajo un enfoque de indagación. Para abordarlo, se consideraron elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999, 2013, 2015), y en particular, el paradigma del cuestionamiento del mundo (Chevallard, 2013), que ofrece una alternativa a la enseñanza matemática, al centrar el estudio en cuestiones abiertas e ivestigables, transformando las aulas en pequeños laboratorios de investigación y la metodología de investigación y de diseño: la ingeniería didáctica. Con base en esto, se diseñó un Recorrido de

20 AÑOS REIEC NIECYT UNICEN

REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Número especial - 20 Años REIEC

Estudio e Investigación (REI), enfocado en el estudio de una cuestión originada en la práctica de la topografía local de la comunidad escolar rural colombiana, que permite determinar el área de los terrenos de siembra de café.

Para presentar esta investigación, se presentan primeramente los elementos teóricos, seguidos de la metodología de la ingeniería didáctica, el diseño del REI, su análisis a priori, su análisis a posteriori, y finalmente un análisis de las oportunidades, desafíos, condiciones y restricciones que emergen al introducir un REI basado en modelización para el estudio de las matemáticas en el contexto rural.

2. ESTADO DEL ARTE

La enseñanza de las matemáticas ha sido objeto de revisión permanente en relación con sus fines y su pertinencia social. Desde los años setenta, informes internacionales, como los Estudios en Educación Matemática publicados por la UNESCO, subrayaron la necesidad de que los currículos respondan a las necesidades de la sociedad, incluyendo aquellas vinculadas con la vida rural, el trabajo y la producción agrícola (Niss, 1981, Broomes, 1981). Estos planteamientos ya advertían que los programas de matemática diseñados para contextos urbanos resultaban poco relevantes para comunidades rurales, donde la enseñanza debía integrarse con la realidad local y contribuir al desarrollo técnico, social y cultural del territorio. En particular, Broomes (1981) propuso que la educación para el desarrollo rural debía completar metas sociales, técnicas, personales, culturales y estéticas, en estrecha relación con la comunidad. Estas orientaciones tienen una visión de la matemática como práctica social, cuyos propósitos no se limitan a la formación disciplinar, sino a la participación crítica en los procesos económicos y democráticos de la sociedad (Niss, 1981). En esta línea, la modelización adquiere un papel central, al permitir que los estudiantes establezcan puentes entre el saber matemático y las prácticas productivas o ambientales de su entorno, precisando las visiones más generales de la modelización, que pretenden vincular las matemáticas escolares con los fenómenos del mundo real (Kaiser & Sriram, 2006). En América Latina, diversas investigaciones han retomado estas preocupaciones para recontextualizar la modelación matemática en escenarios rurales (De la Hoz, 2020; Rosa et al., 2017; Solares et al., 2011). En esta perspectiva, la Etnomatemática (D'Ambrosio, 2015) y más recientemente la etnomodelación (Rosa y Orey, 2024) proponen que los proyectos de modelización escolar pueden fortalecer la identidad campesina o rural y el sentido de pertenencia, al reconocer saberes locales como fuentes legítimas de conocimiento matemático. Otras investigaciones (Covián y Romo, 2014; Solares Pineda et al., 2011; Ruíz-Rojas et al., 2020) destacan, asimismo, el valor educativo de actividades que emergen de la vida laboral, donde la matemática se aprende más allá del aula y cobra sentido en la resolución de problemas de medición, producción, construcción de vivienda tradicional maya o contemporánea, y comercio local. Los estudios de Escobar y Broitman (2016) sobre la enseñanza en aulas multigrado rurales muestran que la heterogeneidad del estudiantado y la cercanía con la vida cotidiana abren oportunidades para repensar las prácticas docentes y promover la construcción colectiva de conocimiento. Estas perspectivas convergen en reconocer la necesidad de un currículo situado, que legitime las formas locales de saber y reorganice la relación entre escuela y comunidad. En síntesis, la literatura muestra que integrar la modelización matemática en las aulas de contextos rurales requiere, además de proponer el estudio de saberes locales, analizar las condiciones institucionales que garanticen su viabilidad y pertinencia. No obstante, persisten desafíos relativos a dichas condiciones, que exigen análisis situados y herramientas teóricas que los hagan posibles. Este estudio, basado en (Rodríguez-Mejía, 2021), se inscribe en esa línea, y explora cómo un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) basado en una práctica topográfica, la medición con cinta, permite a un grupo de estudiantes de octavo y noveno grado de secundaria (13 a 15 años) de una escuela colombiana realizar el levantamiento de un terreno de siembra de café.

3. MARCO TEÓRICO

Desde la TAD se concibe que toda actividad humana se desarrolla en instituciones (Chevallard, 2019), entendidas como organizaciones sociales estables (por ejemplo, la escuela, la familia, la siembra de café o un club de baile) que ofrecen a sus sujetos recursos para realizar tareas y enfrentar situaciones problemáticas de forma eficaz. Analizar la dimensión institucional de la actividad matemática permite comprender cómo las condiciones, recursos y restricciones institucionales moldean o determinan dicha actividad.

Para el análisis de la actividad, esta teoría propone un modelo único, la praxeología, compuesta de cuatro componentes $[T, \tau, \theta, \Theta]$:tipo de tarea T –lo que se hace—, técnica τ –la forma en que se hace—, tecnología θ –discurso que produce, explica y justifica la técnica—, y teoría Θ]–un discurso más general que produce, explica, y justifica la tecnología. Así, cada actividad matemática realizada en cierta institución puede describirse en términos de praxeologías u organizaciones matemáticas (OM). Según Castela y Romo (2011), se pueden distinguir tres instituciones en relación con las praxeologías matemáticas: de producción, de enseñanza y de uso. En las primeras se producen y validan praxeologías; en las segundas se transmiten, y en las últimas se utilizan. Aunque en cada una se puedan crear, enseñar o usar praxeologías, su vocación primaria favorece una de estas acciones. Por ejemplo, una praxeología del teorema de Pitágoras puede adaptarse a una institución de construcción de vivienda, con el objetivo de levantar un muro recto, sin que sea necesario demostrar el teorema, como sí sucede en la geometría escolar. Vázquez, Romo-Vázquez y Trigueros (2016) introducen el concepto de praxeología mixta, entendida como una organización matemática en la que intervienen componentes de al menos dos instituciones (por ejemplo, la enseñanza de las matemáticas y una institución usuaria del saber matemático, como la industria o la construcción de viviendas mayas).

Según Sala, Barquero y Font (2020), la modelización matemática en la TAD se entiende como un proceso de "reconstrucción y articulación de organizaciones matemáticas de complejidad creciente" (p. 550) que surge del cuestionamiento sobre la razón de ser de las OM a articular. La modelización se origina en el surgimiento de cuestiones problemáticas que conducen al estudio de dichas organizaciones, pudiendo situarse a diferentes niveles –puntuales, locales, regionales o globales –, cuya respuesta se sitúa en una OM regional (Bosch, García, Gascón y Ruiz, 2006). Los problemas que dan lugar a la modelización pueden provenir de situaciones intra- o extramatemáticas y deben transformarse en problemas más complejos que permitan articular praxeologías diversas. Desde la TAD, la modelización amplía la noción clásica: deja de ser un medio para estudiar matemáticas y se convierte en un fin de la enseñanza de las matemáticas, asociado a una "enseñanza funcional de las matemáticas" (Barquero, Bosch y Gascón, 2011, p. 8). Lo relevante ya no es cuán "real" resulta la cuestión abordada, sino la viabilidad de la cuestión para generar una actividad matemática amplia.

En el paradigma del Cuestionamiento del Mundo, propuesto como alternativa al paradigma de *Visita de las obras* —caracterizado por el estudio de conocimientos matemáticos como obras acabadas y descontextualizadas— se propone el estudio de cuestiones abiertas a través de Recorridos de Estudio e Investigación (REI). Un REI surge de una cuestión generatriz Q_0 potente y significativa, capaz de suscitar un estudio profundo de diversas praxeologías y de nuevas cuestiones, con el fin de construir una respuesta $R^{\heartsuit}$ que satisfaga a la comunidad que aborda Q_0. Las cuestiones derivadas de Q_0 conducen al estudio de respuestas preexistentes $R^{\Diamond}$ halladas en distintas obras (O) disponibles en diversos media (fuentes de información) y a la formulación de nuevas cuestiones (Chevallard, 2013). El proceso puede representarse mediante el esquema Herbartiano: $[S(X;Y;Q_0) \curvearrowright M = \{Q_1,\ Q_2, \dots, Q_j, \dots, R_1^{\Diamond}, \dots, R_n^{\Diamond},\ O_{n+1}, \dots, O_m\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$

En el esquema $S(X;Y;Q_0)$ representa el sistema didáctico en el que se estudia Q_0, donde X es un grupo de estudiantes, y Y el docente o docentes que guían el recorrido y M el medio didáctico, constituido por las cuestiones derivadas, las respuestas preexistentes y las obras utilizadas.

La puesta en marcha de un REI moviliza una serie de dialécticas (Chevallard, 2013), que mantienen viva la cuestión generatriz y dinamizan el estudio. En esta investigación, el análisis se centra en dos de ellas: la dialéctica de cuestiones y respuestas, que expresa la interacción continua entre formular nuevas preguntas y buscar sus respuestas; y la dialéctica de los medios y media que describe cómo las respuestas preexistentes se transforman y validan para integrarse en el estudio (Gazzola, Otero y Llanos, 2020). Es la actividad de modelización la que permite validar la pertinencia de determinadas respuestas encontradas en ciertos *media* posibilitando su adaptación al nuevo contexto de estudio (Barquero, Bosch y Gascón, 2011). El diseño y la implementación de un REI implican describir y analizar las praxeologías que intervienen en la búsqueda de respuestas a la cuestión generatriz Q_0, así como las condiciones y restricciones institucionales que inciden en su desarrollo. Este análisis conduce a reconocer la dimensión ecológica de la modelización matemática (Llanos y Otero, 2015). Desde una perspectiva ecológica, la modelización no se produce en el vacío: surge dentro de organizaciones didácticas representadas mediante la tripleta (x, y, O) (Chevallard, 2009), donde: "x" representa al sujeto que estudia y aprende; "y" al sujeto que realiza gestos didácticos para apoyar dicho estudio, y "O" al objeto de estudio o apuesta didáctica (Chevallard, 2013). La introducción de un REI altera las relaciones e interacciones entre x-y-O, generando nuevas formas de interacción. El análisis ecológico permite identificar cómo evolucionan estas relaciones y cuáles son las condiciones que posibilitan una modelización exitosa.

Específicamente, la modelización afecta tres dimensiones de la ecología de la organización didáctica (forma de proponer el estudio): la mesogénesis, la topogénesis y la cronogénesis (Chevallard, 2009). La mesogénesis se refiere a la fabricación del medio didáctico (M); responsabilidad compartida entre docente y estudiantes. La topogénesis que amplía el topos del estudiantado, otorgándole poder para introducir nuevas obras y cuestiones. La cronogénesis que implica una dilatación del tiempo didáctico debido al trabajo de construcción del medio didáctico M y a la ampliación del tiempo real de estudio. El análisis ecológico, en conjunto, permite reconocer los elementos relacionales que hacen posible el uso y la adaptación de praxeologías para responder a una cuestión generatriz Q_0, dentro de una institución específica.

4. METODOLOGÍA

Esta investigación fue de corte cualitativo, dados sus fines exploratorios y descriptivos (Buchholtz, 2019). Asimismo, se asumen principios de la investigación-acción participativa en educación (Balcazar, 2003), estableciendo como premisa la vinculación activa del estudiantado en la resolución de problemáticas locales desde el aula de matemáticas y en beneficio de la comunidad rural.

4.1. Contexto, participantes y datos

El contexto educativo estuvo conformado por un aula rural multigrado colombiana, a la que asistían 16 estudiantes (8 mujeres y 8 hombres) de octavo y noveno grado de secundaria, entre los 13 y 15 años. La clase se organizó en cinco grupos (cuatro grupos de tres integrantes y un grupo de cuatro integrantes). El REI de modelización se desarrolló durante el último trimestre de 2021, con una duración total de 45 horas distribuidas en 10 sesiones, incluyendo una jornada final de presentación de resultados. Para el análisis se recolectaron: observaciones del maestro-investigador,

REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Número especial - 20 Años REIEC

bitácoras y producciones del estudiantado, evidencias fotográficas y registros de audio.

El análisis presentado en este reporte se centra en el trabajo de uno de los grupos conformados, denominado grupo 2, seleccionado debido a la riqueza y completitud de sus explicaciones y evidencias, lo que permite ilustrar con mayor detalle dinámicas observadas también en el conjunto de la clase. En particular, se analizan tres escenarios del REI: el estudio de problemas propuestos durante el apestamiento, la toma de medidas en el terreno durante el trabajo de campo, y la corrección de ángulos y la estimación de áreas durante el trabajo de gabinete.

4.2. La Ingeniería Didáctica

Para el diseño y puesta en marcha del REI se consideró la metodología de la ingeniería didáctica (Artigue, 2020), dada su utilidad para el diseño de los REI (Bosch y Barquero, 2015; García et al., 2020; Siero et al., 2022; Ramírez-Sánchez et al., 2023). Se siguieron sus cuatro fases: análisis preliminares, diseño y análisis a priori del REI, análisis in vivo del REI y análisis a posteriori del REI (Figura 1). En los análisis preliminares (epistemológico, didáctico e institucional) se analizó la praxeología “estimar el área de un terreno”, a partir de documentos y libros de topografía (p. ej. García, 1994; Montes de Oca, 1989;) y de matemáticas (p. ej. Guerrero, 2006) así como del trabajo con un técnico topógrafo de la comunidad, quien precisó la técnica del levantamiento con cinta y el bloque tecnológico-teórico asociado. Se asumió que dicha praxeología es mixta, en tanto que articula conocimientos geométricos y trigonométricos, propios de la enseñanza de las matemáticas con técnicas de una institución usuaria de las matemáticas: la topografía.

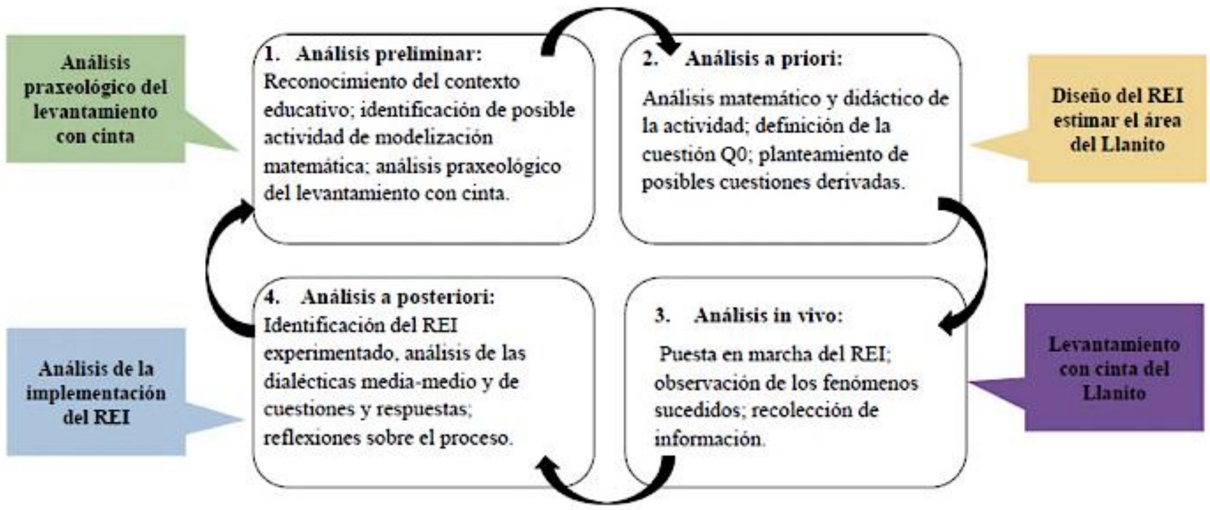


Figura 1. Adaptación de las fases de la Ingeniería Didáctica

En el análisis a priori se diseñó el REI de modelización, surgido de la pregunta: *Q0*: *¿Cuál es la mayor superficie de área cultivable del lote el Llanito?*, y se construyó un REI hipotético, principalmente utilizando **la dialéctica de la investigación**. El análisis in vivo se correspondió con la puesta en marcha; a medida que se experimentaba, se analizaba lo realizado por los estudiantes y se refinaba, con el objetivo de producir una respuesta para Q_0. Finalmente, el análisis a posteriori permitió contrastar el recorrido hipotético con el vivenciado, así como identificar las implicaciones ecológicas de la actividad de modelización desarrollada por el grupo de estudiantes de la escuela rural.

4.3. Análisis Preliminares: El Levantamiento con Cinta

Como parte de los análisis preliminares, se realizó un diálogo inicial entre el maestro de matemáticas y la clase, identificando que, para determinar la densidad de la siembra del café, es necesario determinar el área del terreno. La comunidad no dispone de recursos especializados para obtener este valor, dado que no existen cultivos tecnificados en la vereda. A partir de una visita del maestro a una finca vecina y del intercambio con una de las familias de la comunidad, se constató que, aunque existen recomendaciones para estimar densidades de siembra cuando el área se mide en hectáreas, esta tarea se dificulta en lotes de pequeña extensión (menos de una hectárea). Posteriormente, el docente recurrió a un técnico en topografía (en formación profesional) para conocer las técnicas utilizadas en la región y su viabilidad en el aula. El técnico recomendó emplear como técnica principal el levantamiento con cinta, dada su accesibilidad material y su facilidad relativa de implementación, incluyendo la obtención y uso de materiales requeridos.

Definido el levantamiento con cinta como praxeología central (*P0*), que fungiría como referente epistemológico del REI, se procedió a su análisis, reconociendo el conjunto de praxeologías topográficas y matemáticas implicadas (Figura

2). Se determinó que estimar el área del terreno mediante P0 implicaría 11 tareas dadas en tres momentos durante el REI: aprestamiento, trabajo de campo y trabajo de gabinete. En el aprestamiento, los participantes adquirirían equipamiento praxeológico básico; en el trabajo de campo, recolectarían medidas y datos; y en el trabajo de gabinete, realizarían cálculos, estimarían y elaborarían un bosquejo del predio.

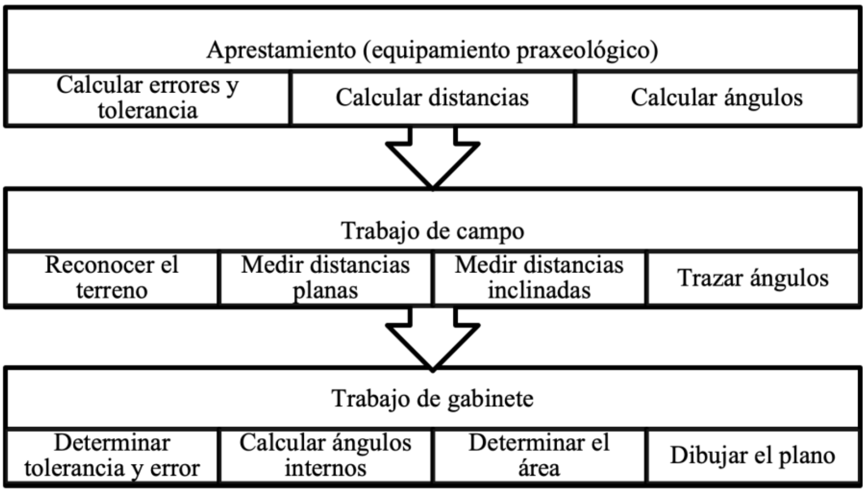


Figura 2. Praxeologías del levantamiento topográfico.

Se consideró el modelo praxeológico extendido (Castela y Romo-Vázquez 2011; Diego-Mantecón et al., 2021) como herramienta para el análisis preliminar. Este modelo se refleja en la forma:

$$\left[T^u \begin{matrix}\tau^m & \theta^m & \Theta^m \\ \tau^u & \theta^u & \Theta^u\end{matrix}\right] \begin{matrix}\leftarrow E\,(M) \\ \leftarrow U\end{matrix}$$

Donde T^u es la tarea desarrollada en una institución usuaria U que hace uso de praxeologías matemáticas, objeto de enseñanza $E(M)$. En este modelo τ^m, θ^m y Θ^m corresponden al tipo de tarea, técnica y tecnología de origen matemático; mientras que, τ^u, θ^u y Θ^u corresponden al tipo de tarea, la técnica y la tecnología originadas en la institución usuaria. La interrelación entre los componentes de U y de $E(M)$ se puede esquematizar como: T^u, τ^{mu}, θ^{mu}, Θ^{mu}. Con fines ilustrativos, se presentan cuatro praxeologías puntuales identificadas en el trabajo de campo y una del trabajo de gabinete, que forman parte de la praxeología local *P0*:

Tarea 1 [$t^u{}_1$]: Medir distancias en superficies planas.

Técnica 1 [$\tau^u{}_1$]: El zaguero ubica el punto cero de la cinta en coincidencia con una ficha que demarca un vértice del terreno; el delantero sostiene el otro extremo, avanza alineando la cinta, la mantiene tensionada y coloca fichas para marcar cada "cintada" (García, 1994; Montes de Oca, 1989; Torres y Villate, 1968).

Tecnología 1 [$\theta^{mu}{}_1$]: Se movilizan las nociones de recta, segmento y suma de segmentos; la alineación se sustenta en la correspondencia entre una recta y dos puntos y la distancia como suma de segmentos de igual longitud (y fracción sobrante) (Guerrero 2006).

Tarea 2 [$t^u{}_2$]: Medir distancias en superficies inclinadas.

Técnica[$\tau^u{}_2$]: En medida descendente, el zaguero ubica la cinta en el suelo en el punto más alto mientras el delantero mantiene la cinta horizontal y tensionada; en terreno ascendente, el zaguero levanta la cinta a lo largo de la plomada mientras el delantero avanza hasta hacer contacto con el suelo (García, 1994; Montes de Oca, 1989; Torres y Villate, 1968).

Tecnología 2 [$\theta^{mu}{}_2$]: Se movilizan ideas de perpendicularidad, ángulo recto y proyección plana; la horizontalidad se apoya en la relación perpendicular entre plomada y cinta, asumiendo un ángulo cercano a 90 grados (Granville, 1954 y Guerrero 2006).

Tarea 3 [$t^u{}_3$]: calcular los ángulos internos.

Técnica 3 [$\tau^u{}_3$]: dividir el polígono base en triángulos, mediante diagonales y emplear fórmulas de tangente del ángulo medio:

$$tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};\ tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};\ \ tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

donde p es el semi-perímetro de cada triángulo, a, b, y c son las medidas de sus lados, y A, B y C son los ángulos del triángulo (García, 1994).

Tecnología [$\theta^{mu}{}_3$]: Resolución de triángulos oblicuángulos a partir de la medida de sus lados mediante el empleo de la tangente del ángulo medio del triángulo **(**Granville, 1954).

Tarea 4 [$t^u{}_4$]: Dibujar el plano del terreno.

REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Número especial - 20 Años REIEC

Técnica 4 [τ^{u}_{3}]: Definir la escala (numérica o gráfica) y trazar el plano proyectando el terreno.

Tecnología 4 [θ^{mu}_{4}]: Proporcionalidad y semejanza de polígonos; la validez del plano depende de una razón de semejanza entre el terreno y su representación. Debe existir una razón de semejanza entre el terreno y el plano, para que este último sea una representación válida del predio. El conocimiento de estas praxeologías permitió avanzar hacia el análisis a priori en el que se configurando una posible organización didáctica OD viable para el estudio de *P0* en el contexto rural considerado.

4.4. Diseño y análisis *a priori* del REI: Estimar el área del Llanito

En la fase inicial, una familia de la comunidad facilitó un lote de pequeña extensión dentro de su finca, denominado “el Llanito” y que sería destinado a la siembra de café. De este escenario emergió la cuestión *Q0*: *¿Cuál es la mayor superficie de área cultivable del lote El Llanito?* Al plantear un REI hipotético, los investigadores se situaron en el rol de aprendices de topografía y, tomando como referente epistemológico la praxeología *P0*, anticiparon posibles caminos para responder a *Q0*. Dada la estructura arborescente de los REI (Barquero, Bosch y Gascón, 2011), se construyó el esquema de cuestiones (Figura 3) y las preguntas a priori organizadas por momentos del REI (Tabla 1).

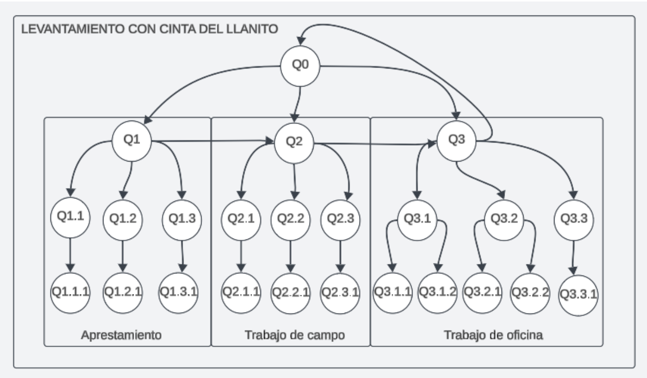


Figura 3. REI hipotético construído a priori

Tabla 1. Cuestiones establecidas a priori

Para el aprestamiento	**Para el trabajo de campo**	**Para el trabajo de oficina**
Q1: ¿Qué se debe saber para hallar el área del terreno? *Q1.1*: ¿Cómo medir las distancias de los lados de un terreno? *Q1.1.1*: ¿Qué hacer si la distancia está sobre una superficie en pendiente? *Q1.2*: ¿Cómo medir los ángulos del polígono propuesto para delimitar un terreno? *Q1.2.1*: ¿Qué se necesita para medir los ángulos del polígono que delimita un terreno? *Q.1.3*: ¿Cómo medir los lados que son de forma curva o irregulares?	*Q2:* ¿Qué forma tiene el terreno y cuáles son sus características? *Q2.1* ¿Qué datos deben recolectarse si el terreno tiene forma regular? *Q2.1.1* ¿Cómo estimar el perímetro del polígono base? *Q.2.2* ¿Qué datos deben recolectarse si el terreno no parece un polígono? *Q2.2.1* ¿Cómo emplear el trazo de detalles por normales? *Q2.2.1* ¿Cómo emplear el trazo de detalles por normales? *Q2.3* ¿Cómo diligenciar la cartera de campo?	Q.3 ¿Cómo analizar los datos obtenidos? Q3.1 ¿Son confiables las medidas hechas? Q3.1.1 ¿Cuál es el margen de error en las mediciones realizadas? Q3.1.2 ¿Cómo estimar ángulos de manera teórica? Q3.2 ¿Qué técnica puede usarse para obtener el área del terreno? Q3.2.1 ¿Cómo calcular el área del polígono de base? Q3.2.2 ¿Cómo estimar áreas irregulares por el trazo de normales? Q3.3 ¿Cómo presentar los análisis realizados? Q3.3.1 ¿Cómo se elabora el plano del terreno?

Estas preguntas constituyeron un recorrido hipotético que facilitó la gestión del diseño sin pretender limitar las formas concretas en que la clase se relacionaría con *Q0*.

5. Puesta en marcha del REI: estimar el área del llanito

Por recomendación del técnico topógrafo y considerando las responsabilidades del levantamiento, la clase se organizó en cinco grupos de 3 a 4 integrantes. Se solicitó a los grupos responder la cuestión generatriz y preparar un informe final para ser presentado a la familia propietaria. Dadas las dificultades de acceso a internet y bibliotecas, se dotó a cada equipo de una computadora portátil con una carpeta digital que contenía obras de topografía (García, 1994; Montes de Oca (1989); Torres y Villate, 1968 y Zamarripa, 2010) y obras de matemáticas (Granville, 1954 y Guerrero, 2006). Se destinaron 18 horas al aprestamiento, 16 horas al trabajo de campo, 9 horas al trabajo de gabinete y 2 horas a la presentación final. En cada sesión los grupos elaboraron bitácoras que fueron conservadas por el maestro al finalizar.

5.1. Contraste entre el REI a priori y el REI vivido: emergencia de cuestiones

La actividad de modelización mostró una complejidad comparable o superior a la proyectada. Al contrastar el REI hipotético con el vivido, se evidenció la emergencia de cuestiones no consideradas en el diseño a priori, y a la vez, la exclusión o reubicación temporal de otras. Por ejemplo, en el diseño a priori se dio por sentada la inclusión de la topografía en el estudio ($Q1_h$ ¿Qué se debe saber para hallar el área del terreno?). En la experiencia, los grupos no establecieron inicialmente una relación directa entre *Q0* y la topografía, formulando una tensión recogida en la cuestión: $Q1_v$ ¿Por qué se debe estudiar topografía para conocer el área del terreno?

REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Número especial - 20 Años REIEC

Asimismo, ciertas preguntas previstas no emergieron, por ejemplo, la cuestión relativa al “trazo de detalles por normales” ($Q2.2.1_h$) no aparece en bitácoras ni reportes, dado que la clase acordó modelar el predio como un polígono irregular, excluyendo técnicas específicas para secciones curvas. En contraste, algunas cuestiones emergieron en momentos distintos a los previstos. El manejo del error, pensado a priori para el trabajo de campo ($Q3.1.1_h$) fue problematizado desde el apresamiento, originando preguntas vivas como: $Q1.1.1.1_v$ “¿Qué uso tienen el error y la tolerancia en las mediciones?”, y $Q1.1.1.1.1_v$ “¿Cómo calcular el error, la tolerancia y el valor más probable de una medida?” Estas preguntas surgieron tras una primera visita al Llanito para poner a prueba la toma de medidas, cuando la socialización de resultados mostró discrepancias entre datos de diferentes grupos. Este proceso de evolución del REI fue esquematizado a través de una arborescencia de preguntas (Figura 5). En síntesis, el REI hizo visible su carácter abierto y dinámico (Barquero, Bosch y Gascón 2011) y posibilitó articular praxeologías de complejidad creciente (medida, decimales, expresiones algebraicas y trigonometría) en función de la búsqueda de respuestas a *Q0*.

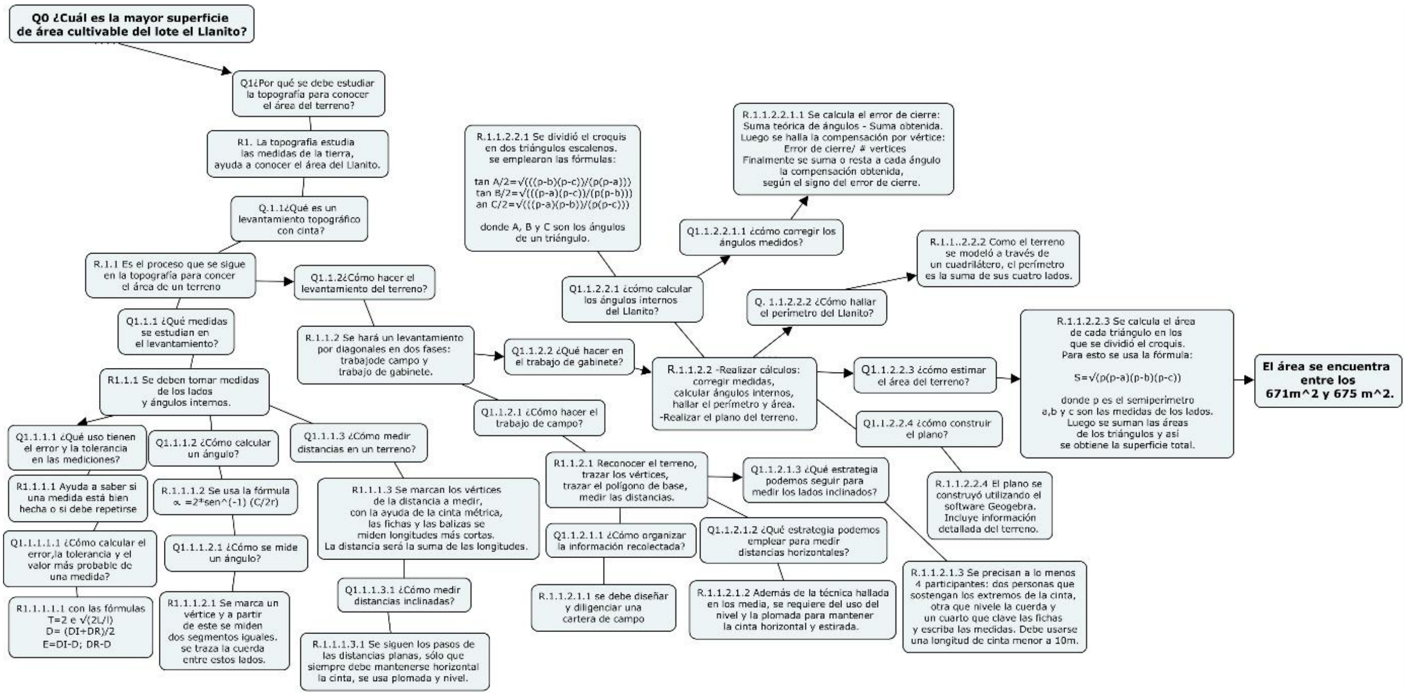


Figura 5: Reconstrucción del REI vivenciado

6. Análisis a posteriori del REI levantamiento del llanito

6.1. Episodio 1: Aprestamiento – estudio de problemas propuestos desde la topografía

Durante el apresamiento, el maestro introdujo el estudio de problemas propuestos en García (1994) y se pusieron a disposición los media de consulta en las computadoras. Un ejercicio trabajó la aceptación de medidas a partir de ida/regreso y el cálculo del valor más probable:

En un terreno muy quebrado, se empleó una cinta de 20 m para medir una distancia, obteniéndose los siguientes resultados:

L_1= 120.30 m (ida)

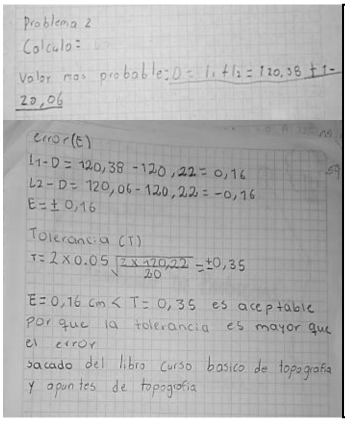
L_2= 120.06 m (regreso)

Si se acepta el resultado, ¿cuál es el valor más probable de la distancia? (p. 15)

A la clase le correspondió resolver los problemas, acudiendo a las obras en búsqueda de las técnicas para abordar el ejercicio. En la Figura 6 aparece la solución presentada por el grupo 2 y la respectiva transcripción.

REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Número especial - 20 Años REIEC


Problema 2
Calculo=
Valor mas probable: D = l1+l2 = 120,38 + 1-
20,06
error(E)
L1-D = 120,38 - 120,22 = 0,16
L2-D = 120,06 - 120,22 = -0,16
E = ± 0,16
Tolerancia (T)
T = 2x0.05 $\sqrt{\frac{2 \times 120,22}{20}}$ = ±0,35
E = 0,16 cm < T = 0,35 es aceptable
por que la tolerancia es mayor que
el error
sacado del libro curso basico de topografia
y apuntes de topografia

Problema 2
Cálculo=
Valor más probable= D = l1+l2=120,38 + 120,06
Error (E)
L1-D= 120,38-120,22 = 0,16
L2-D = 120,06-120,22 = -0,6
Tolerancia (T)
T= $2 * 0,05\sqrt{\frac{2*120,22}{20}}$= ±0,35
E = 0,16 cm < T= 0,35 es aceptable porque la tolerancia es mayor que el

Figura 6. Solución al problema 2 dada por el grupo 2

El grupo 2 basó su solución en técnicas halladas en García (1994) y Zamarripa (2010), movilizando ostensivos como fórmulas para la tolerancia $T = 2\sqrt{\frac{2L}{l}}$, valor más probable, L= (LI+LR)/2 y error, E=LI-L; LR-L. A partir del criterio $E<T$ la clase comprendió que la confiabilidad de una medida depende de la relación entre el error estimado y la tolerancia permitida. Desde la dialéctica de los media/medio, se observó que los grupos exploraron, compararon y seleccionaron fuentes, estableciendo criterios de idoneidad ligados tanto a la comprensibilidad del lenguaje como a la cercanía entre ejemplos y problemas. El maestro actuó como experto asesor, clarificando dudas y dinamizando la discusión; posteriormente, las plenarias permitieron comparar soluciones y estabilizar respuestas aceptables.

6.2. Episodio 2: Trabajo de campo – toma de medidas en el Llanito

El trabajo de campo inició con una jornada de adecuación del predio (desyerbe y retiro obstrucciones). Para avanzar en la toma de medidas, los grupos marcaron vértices con estacas artesanales, siguiendo recomendaciones de las obras consultadas (García, 1994 y Zamarripa, 2010). La medición “a trozos” planteó desafíos de alineación de la cinta, lo que llevó a los equipos a delimitar el polígono de base y sus diagonales mediante cuerda de fique atada entre estacas (Figura 7).

Figura 7. Delimitación del predio por el grupo 2

El trabajo en zonas inclinadas intensificó las dificultades para mantener tensión y horizontalidad. Un estudiante, cuyo padre es constructor, sugirió complementar plomadas con niveles de mano; a partir de ello se dotó a cada grupo de un nivel y se socializó su uso (Figura 8).

Figura 8. Uso de plomada y nivel por el grupo

Además, para medir pendientes se reconfiguraron roles: tareas que en las fuentes se realizan con dos zagueros requirieron, en la práctica, la intervención coordinada de al menos cuatro estudiantes, incluyendo alineación, nivelación, colocación de fichas y registro de datos (Figura 9).

Figura 9. Medición de distancia inclinada

6.3. Episodio 3: Trabajo de gabinete - corrección angular y estimación del área

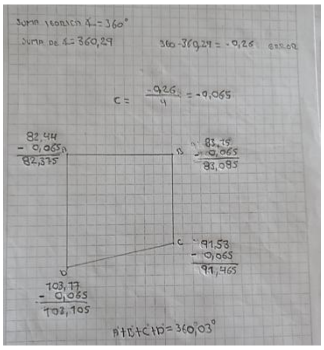
Para estimar ángulos internos del polígono base que modeló al Llanito, los grupos siguieron la técnica descrita en García (1994). Posteriormente, emergió la cuestión sobre la validación de ángulos medidos, dando lugar a la búsqueda de una técnica de compensación angular en Zamarripa

20 AÑOS REIEC NIECYT UNICEN

REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Número especial - 20 Años REIEC

(2010). Esta necesidad no fue prevista en el análisis a priori y se interpretó como efecto de la experiencia concreta de la medición, que visibilizó la carencia de destreza topográfica y la necesidad de criterios de corrección (Figura 10).



SUMA TEORICA ∢=360°
SUMA DE ∢=360,29°
360-360,24 = -0,26 ERROR
C= -0,26/4 = -0,065
A= 82,44-0,065 = 82,375
B= 83,15-0,065 =83,085
C= 91,53-0,065= 91,465
D= 103,17-0,065 = 103,105
A°+B°+C°+D°= 360,03°

Figura 10. Corrección de ángulos del grupo 2

Para responder a *Q0* se adoptó la técnica de dividir la superficie en triángulos, calcular el área de cada uno y sumar superficies. Se utilizó la fórmula de Herón:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donde *S* es la superficie de un triángulo, p el semiperímetro y *a*, *b*, *c* sus lados. La adopción de la técnica por parte del equipo 2 se comparte en la Figura 11 e ilustra cómo los estudiantes lograron utilizarla para determinar el área del Llanito.

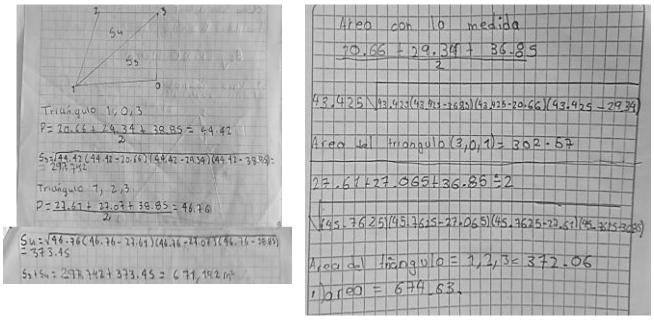


Figura 11. Estimación del área del Llanito grupo 2

Finalmente, se acudió a Geogebra para construir un bosquejo del terreno y realizar una validación complementaria: el grupo 2 obtuvo 674,63 m² y, con GeoGebra, fue de 675,58 m², mostrando una alta aproximación. En este estudio, el análisis con GeoGebra se orienta principalmente a su valor didáctico como tecnología digital de validación dentro del medio, más que al cumplimiento estricto de normas profesionales del quehacer topográfico.

6.4. Dinámicas cooperativas del REI

El REI dio lugar a un ambiente de estudio cooperativo y dialógico. Las plenarias funcionaron como espacios de discusión, aclaración, proposición de ideas y presentación de avances. Se observó acompañamiento entre pares, donde estudiantes con mayor dominio técnico apoyaban a otros y operaban como media. Incluso hubo momentos de integración entre grupos para abordar colectivamente tareas de medición que, a priori, se habían planificado para equipos pequeños. La alternancia entre trabajo en pequeños grupos y gran grupo emergió como condición práctica para sostener el levantamiento.

7. RESULTADOS

7.1. Contribución del REI a confrontar la carencia de sentido de la clase de matemáticas en este contexto

Para Bosch, García, Gascón y Ruiz (2006), una cuestión matemática puede estudiarse con sentido cuando posee legitimidad social o cultural, legitimidad matemática y legitimidad funcional. El REI implementado permitió integrar al aula elementos humanos y no humanos previamente desatendidos: la siembra del café se hizo cercana a las matemáticas; el aula visitó a sus vecinos; el Llanito se convirtió en un espacio de experimentación y se dio voz a saberes locales y técnicos. La actividad de modelización motivó el estudio matemático en función de superar el desafío de medir el predio, y no como preparación para una evaluación. En este proceso se incorporaron al medio nociones y técnicas relativas al error y la tolerancia, perímetro, propiedades de triángulos, identidades trigonométricas, fórmula de Herón, uso de instrumentos de medición y uso de Geogebra, movilizando medias diversos (obras, documentos, experto, familia, estudiantes y maestro). Así, el REI articuló saber local con saberes matemáticos y topográficos, dando lugar a un estudio funcional de las matemáticas, donde lo estudiado cobraba vida en el Llanito y se armonizaba con las vivencias de los participantes. Estimar el área del Llanito implicó prácticas matemáticas y topográficas, pero también prácticas de cuidado y acompañamiento genuino.

7.2. El REI y su impacto en el aula rural

Durante el REI, la construcción del medio didáctico fue compartida entre el maestro y la clase. Los participantes evaluaron obras y establecieron criterios (individuales y colectivos) para incluirlas como recursos del medio; asimismo, propusieron adaptaciones para hacer viables técnicas bajo restricciones locales. También emergieron dinámicas colectivas (uso de nivel, integración entre equipos) que reconfiguraron prácticas habituales donde el maestro monopoliza la construcción del medio. Esta tensión se expresó en búsquedas frecuentes de aprobación docente y silencios a la espera de instrucciones; no obstante, representó un avance hacia una mesogénesis caracterizada por el cooperativismo y la articulación entre aula, territorio y saberes externos.

En términos de la topogénesis, el REI posicionó al maestro en un rol de liderazgo y dinamización, atento a prever obstáculos al estudio y a gestionar recursos; mientras que los estudiantes, en calidad de investigadores, propusieron, colaboraron, controvirtieron y organizaron momentos del estudio. El trabajo en equipo favoreció el acompañamiento entre estudiantes de diferentes grados y las plenarias facilitaron el intercambio de ideas y la construcción de consensos. En particular, la actividad de modelización atenúo barreras entre cursos que suelen operar en aulas multigrado, abriendo posibilidades de circulación intelectual entre estudiantes que, aunque comparten espacio físico, suelen trabajar bajo segmentaciones curriculares rígidas.

En cuanto a la cronogénesis, implementar la modelización implicó una dilatación del tiempo didáctico, potencialmente problemática en contextos regulados por lógicas de eficacia y dosificación de contenidos. En consecuencia, la viabilidad de un REI en este tipo de aulas exige condiciones institucionales y organizativas que reconozcan la necesidad de tiempos extendidos, coordinación docente y trabajo cooperativo para sostener el estudio y la investigación en torno a cuestiones con legitimidad territorial.

8. Conclusión

Este estudio mostró que la implementación de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) de modelización matemática, anclado en una problemática territorial concreta, constituye una vía viable para confrontar la carencia de sentido de la clase de matemáticas en un aula rural multigrado. A partir de la cuestión generatriz sobre la estimación del área cultivable de un predio, el REI permitió articular saberes matemáticos y topográficos con prácticas locales, configurando una actividad de estudio con legitimidad social, funcional y matemática.

Desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, el análisis evidenció el carácter abierto y dinámico del REI. La comparación entre el recorrido hipotético y el recorrido vivido mostró la emergencia de cuestiones no previstas, la reubicación temporal de otras y la exclusión de algunas técnicas inicialmente consideradas. Estas transformaciones no constituyen desviaciones del diseño, sino indicadores de la vitalidad de la actividad de modelización cuando se sitúa en un contexto real y se sostiene en una pedagogía de la pregunta o la investigación. El REI favoreció la construcción de un medio didáctico compartido, en el que participaron activamente estudiantes, maestro, obras de referencia, instrumentos de medición, tecnologías digitales y saberes comunitarios. Este medio posibilitó dinámicas cooperativas y dialógicas que reconfiguraron las posiciones de los actores: los estudiantes asumieron roles de investigadores, asesores y mediadores entre pares, mientras que el maestro operó como líder y gestor del estudio, atento a las condiciones materiales y cognitivas que lo hacían viable. En términos didácticos, estas transformaciones se reflejaron en procesos de mesogénesis, topogénesis, y cronogénesis que tensionaron las prácticas escolares habituales y ampliaron las posibilidades de interacción y circulación del saber en el aula multigrado. Asimismo, el estudio permitió observar cómo la modelización matemática, puesta en marcha mediante un REI, favorece una articulación progresiva de organizaciones matemáticas de complejidad creciente, cuyo sentido se construye en la actividad misma y no por acumulación de contenidos prescritos. En este marco, nociones como medida, error, proporcionalidad y trigonometría adquirieron significado en función de la necesidad de responder a la cuestión generatriz, reforzando un estudio funcional de las matemáticas. Si bien los resultados se circunscriben a un contexto específico y a un estudio de carácter cualitativo, este trabajo aporta evidencias sobre el potencial de los REI como dispositivo didáctico para la modelización matemática en contextos rurales multigrado. Como proyección, se abre la necesidad de investigar las condiciones institucionales que permitan sostener este tipo de propuestas en el tiempo, así como explorar su articulación con políticas curriculares y formativas orientadas a una educación matemática que reconozca el territorio, el trabajo colectivo y el sentido del estudio como ejes centrales.

9. REFERENCIAS

Artigue M. (2014). Didactic Engineering in Mathematics Education. En Lerman S (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_44

Artigue, M. (2014). Didactic engineering in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education (pp. 159–162).* Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_44

Artigue, M. (2020). Metodologías de investigación en didáctica de las matemáticas: ¿Dónde estamos? *Educação Matemática Pesquisa, 22*(3), 25-64. *https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i3p025-064*

Barquero, B., y Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. In A. Watson, M. Ohtani (Eds.), *Task Design in Mathematics Education: an ICMI Study 22* (pp. 249-272). Springer Nature. *https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_13*

Balcazar, F. (2003). Investigación acción participativa (IAP): Aspectos conceptuales y dificultades de implementación. *Fundamentos en Humanidades, 4*(7-8), 59-77. https://www.redalyc.org/pdf/184/18400804.pdf

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educação Matemática Pesquisa, 15*(1), 1-28.

Bosch, M., García, F., Gascón, J. y Ruiz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática, 18*(2), 37-74.

Broomes, D. (1981). *Las metas de la matemática para el desarrollo rural*. En M. Niss (Ed.), *Estudios en Educación Matemática, Vol. 2* (pp. 53–64). UNESCO.

Buchholtz, N. (2019). Planning and Conducting Mixed Methods Studies in Mathematics Educational Research. En G. Kaiser, & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (pp. 131-152) Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7

Castela, C., & Romo-Vázquez, A. (2011). Des mathématiques à l'automatique: étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *31*(1), 79-130.

Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the Didactic: an attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of mathematics education*, *12*, 71-114.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education [REDIMAT]*, *2*(2), 161-182. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

Chevallard, Y. (2009). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. *Actes de la XVe École d´Été de Didactique des Mathématiques*, Clermont-Ferrand, Francia. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Cours_de_YC_a_l_EE_2009.pdf

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16*(2), 221-266.

Covián, O. y Romo, A. (2014). Modelo Praxeológico Extendido una Herramienta para Analizar las Matemáticas en la Práctica: el caso de la vivienda Maya y levantamiento y trazo topográfico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática. 28*(48), 128-148

D'Ambrosio, U. (2015). Mathematical modelling as a strategy for building-up systems of knowledge in different cultural environments. En G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social, and cognitive influences* (pp. 35-44). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_2

De la Hoz, E. (2020). La siembra tradicional del café de la comunidad indígena Arhuaca en la enseñanza de las matemáticas escolares en los grados de 9° educación básica secundaria, 10° y 11° educación media (Tesis de maestría). CICATA-IPN.

Diego-Mantecón, J.D., Haro, H., Blanco, T., & Romo-Vázquez, A. (2021). The chimera of the competency-based approach 6 to teaching mathematics: a study of carpentry 7 purchases for home projects. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(2), 339-357. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10032-5

Escobar, M., & Broitman, C. (2016). La enseñanza de las matemáticas en aulas plurigrado como objeto de estudio en la formación docente. En D. Juárez Bolañoz (coordinador), *Educación rural: Experiencias y propuestas de mejora*. Red Temática de Investigación Rural; Colofón Ediciones Académicas Pedagogía.

García, F. J., Barquero, B., Florensa, I., & Bosch, M. (2020). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática [AIEM]*, *15*, 75-94. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.267

García, F. (1994). *Curso Básico de Planimetría*. Árbol Editorial.

Gazzola, M., Otero, M., & Llanos V. (2020). Acciones didácticas en el desarrollo de un recorrido de estudio y de investigación que involucra a la matemática y a la física en la escuela secundaria. *Perspectiva Educacional*, *59*(1), 52-80. http://dx.doi.org/10.4151/07189729-vol.59-iss.1-art.1006

Granville, W. (1954). Trigonometría plana y esférica (3ª ed.). Ginn and Company.

Guerrero, A. (2006). Geometría desarrollo axiomático. Ecoe Ediciones Ltda.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 38*(3), 302–310.

Niss, M. (1981). *Introducción general*. En M. Niss (Ed.), *Estudios en Educación Matemática, Vol. 2* (pp. 7–21). UNESCO.

Llanos, V., & Otero, M. (2015). La incidencia de las funciones didácticas topogénesis, mesogénesis y cronogénesis en un Recorrido de Estudio y de Investigación: el caso de las funciones polinómicas de segundo grado. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa,* *18*(2), 245-275. https://doi.org/10.12802/relime.13.1824

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2010). Manual de implementación postprimaria rural. http://redes.colombiaaprende.edu.co/ntg/men/archivos/Ref erentes_Calidad/Modelos_Flexibles/Postprimaria/Guias%20del%20docente/Manual%20de%20implementacion.pdf

Montes de Oca, M. (1989). Topografía (4ª ed.). Ediciones Alfa-omega.

Pontificia Universidad Javeriana (2024). Calidad educativa en zonas rurales de Colombia: un camino por recorrer. https://www.javeriana.edu.co/recursosdb/5581483/11594517/INFORME98-Educación-rural+LEE2024.pdf

Pontificia Universidad Javeriana (2024). Pruebas SABER 11: una década de análisis. https://www.javeriana.edu.co/recursosdb/5581483/11594517/INF-92-Analisis-Decada-Saber11-LEE2024.pdf

Ramírez-Sánchez, C., Romo-Vázquez, A., Romo-Vázquez, R., Velásquez Rojas, D. (2023). Study of modeling questions in a first-year university mathematics online course. *Educational Studies in mathematics, 114*. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10261-w

Rodríguez-Mejía, M. (2021). *Propuesta didáctica basada en modelización matemática para el aula multigrado, el caso de la topografía* (Tesis de maestría). CICATA-IPN. https://www.cicata.ipn.mx/assets/files/cicata/ProME/docs/tesis/tesis_maestria/2023/miguelrm.pdf

Rosa, M., Shirley, L., Gavarrete, M. E., & Alangui, W. V. (Eds.). (2017). *Ethnomathematics and its Diverse Approaches for Mathematics Education. ICME-13 Monographs*. Springer.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2024). Etnomodelación como un proceso de glocalización y decolonización. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática*, *4*(2), 1–23. https://doi.org/10.54541/reviem.v4i2.109

Ruíz-Rojas, A., Romo-Vázquez, A., y Solares-Rojas, A. (2020). Proyecto de construcción de una barda escolar: Un dispositivo didáctico interinstitucional para Telesecundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *18*, 119-135. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.280

Sala, G., Barquero, B., y Font, V. (2020). Modelización e indagación en la propuesta de un REI codisciplinar de matemáticas e historia. *Educação Matemática Pesquisa*, *22*(4), 546-562. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p546-562

Solares Pineda, D., Solares, A., & Padilla, E. (2011). La enseñanza de las matemáticas más allá de los salones de clase. Análisis de actividades laborales urbanas y rurales. *Educación Matemática*, *28*(1), 69-98. https://doi.org/0.24844/EM2801.03

Siero, L., Echavarría, L., Romo-Vázquez, A., & Navarro, J. (2022). Diseño de un dispositivo de rehabilitación para la trombosis: una actividad de modelización matemática en la formación de ingenieros. *Avances de investigación en educación matemática [AIEM]*, *21*, 107-1234. https://doi.org/10.35763/aiem21.4258

Torres, A. & Villate, E. (1968). Topografía. Editorial Norma.

Vázquez, R., Romo, A., Romo-Vázquez, R., & Trigueros, M. (2016). La separación ciega de fuentes: un puente entre el álgebra lineal y el análisis de señales. *Educación Matemática,* *28*(2), 31-57. https://doi.org/10.24844/em2802.02

Zamarripa, M. (2010). Apuntes de topografía. Facultad de Estudios Superiores Acatlán. https://www.studocu.com/bo/document/universidad-tecnologica-boliviana/tpografia/apuntes-de-topografia-zamarripa/25294235.