20 AÑOS REIEC NIECYT UNICEN

REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Número especial - 20 Años REIEC

Una experiencia virtual en la formación inicial docente para la comprensión de los números complejos

Valeria Randolph[1], Marcela Parraguez[2], Sebastián Herrero[3]

valeria.randolph@pucv.cl, marcela.parraguez@pucv.cl, sebastian.herrero@usach.cl

[1,2] *Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile*
[3] *Departamento de Matemática y Ciencias de la Computación, Universidad de Santiago de Chile, Chile*

Resumen

La enseñanza y comprensión de los números complejos constituye un desafío persistente en la formación inicial de profesores de matemática, debido a la tensión entre enfoques procedimentales y la necesidad de construir significados algebraicos, geométricos y estructurales integrados. En este contexto, los entornos virtuales de aprendizaje ofrecen oportunidades para diseñar experiencias formativas que favorezcan la articulación entre distintas formas de pensar los objetos matemáticos. El objetivo de este estudio es describir la articulación de los modos de pensar los números complejos que evidencian futuros profesores de matemática en un curso virtual orientado al desarrollo de un Pensar Práctico y Teórico de este sistema numérico. El marco teórico se sustenta en la teoría Modos de Pensamiento, considerando una variedad aplicada a los números complejos que distingue los modos geométrico-gráfico estático y dinámico, analítico-aritmético y analítico-estructural. La investigación adopta un enfoque cualitativo interpretativo, mediante un estudio de caso en el que participaron 22 futuros profesores de matemática. Los datos, obtenidos a partir de producciones escritas de cuatro tareas matemáticas, fueron analizados mediante análisis de contenido. Los resultados muestran un predominio del modo de pensar analítico-aritmético y dificultades para consolidar significados geométricos dinámicos y estructurales, aunque se identifican articuladores relevantes —como el módulo, las partes real e imaginaria y las transformaciones complejas— que favorecen la interacción entre modos de pensar. Se concluye que el diseño de experiencias virtuales con enfoque histórico-epistemológico y cognitivo puede contribuir a una comprensión más integrada de los números complejos en la formación inicial docente.

Palabras clave: modos de pensamiento; números complejos; formación inicial de profesores; curso virtual

A virtual experience in pre-service teacher education for the understanding of complex numbers

Abstract

The teaching and understanding of complex numbers remain a persistent challenge in pre-service mathematics teacher education, due to the tension between predominantly procedural approaches and the need to construct integrated algebraic, geometric, and structural meanings. In this context, virtual learning environments offer opportunities to design educational experiences that foster the articulation of different ways of thinking about mathematical objects. The aim of this study is to describe the articulation of the modes of thinking about complex numbers evidenced by pre-service mathematics teachers in a virtual course oriented toward the development of Practical and Theoretical Thinking of this numerical system. The theoretical framework is grounded in the Theory of Modes of Thinking, considering a variety applied to complex numbers that distinguishes static and dynamic geometric-graphical modes, analytic-arithmetic modes, and analytic-structural modes. The study adopts a qualitative interpretive approach through a case study involving 22 pre-service mathematics teachers. Data, obtained from written productions of four mathematical tasks, were analyzed using content analysis. The results show a predominance of the analytic-arithmetic mode of thinking and difficulties in consolidating dynamic geometric and structural meanings; however, relevant articulators—such as the modulus, the real and imaginary parts, and complex transformations—are identified as facilitating interaction between modes of thinking. It is concluded that the design of virtual learning experiences grounded in a historical-epistemological and cognitive perspective can contribute to a more integrated understanding of complex numbers in pre-service teacher education.

Keywords: modes of thinking; complex numbers; pre-service teacher education; virtual course

Une expérience virtuelle dans la formation initiale des enseignants pour la compréhension des nombres complexes

Résumé

L'enseignement et la compréhension des nombres complexes constituent un défi persistant dans la formation initiale des enseignants de mathématiques, en raison de la tension entre des approches principalement procédurales et la nécessité de construire des significations algébriques, géométriques et structurelles intégrées. Dans ce contexte, les environnements virtuels d'apprentissage offrent des opportunités pour concevoir des expériences de formation favorisant l'articulation entre différentes façons de penser les objets mathématiques. L'objectif de cette étude est de décrire l'articulation des modes de pensée relatifs aux nombres complexes mobilisés par de futurs enseignants de mathématiques dans un cours virtuel orienté vers le développement d'un penser pratique et théorique de ce système numérique. Le cadre théorique s'appuie sur la théorie des Modes de Pensée, en considérant une variété appliquée aux nombres complexes qui distingue les modes géométrique-graphique statique et dynamique, analytique-arithmétique et analytique-structurel. La recherche adopte une approche qualitative interprétative, au moyen d'une étude de cas à laquelle ont participé 22 futurs enseignants de mathématiques. Les données, issues des productions écrites de quatre tâches mathématiques, ont été analysées par une analyse de contenu. Les résultats montrent une prédominance du mode de pensée analytique-arithmétique et des difficultés à consolider des significations géométriques dynamiques et structurelles ; toutefois, des articulateurs pertinents — tels que le module, les parties réelle et imaginaire, et les transformations complexes — sont identifiés comme favorisant l'interaction entre les modes de pensée. Il est conclu que la conception d'expériences virtuelles fondées sur une perspective historico-épistémologique et cognitive peut contribuer à une compréhension plus intégrée des nombres complexes dans la formation initiale des enseignants.

Mots clés: modes de pensée ; nombres complexes ; formation initiale des enseignants ; cours virtuel

1. INTRODUCCIÓN

En el contexto de los avances e innovaciones en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas en el siglo XXI, la formación inicial de profesores se ha constituido en un espacio estratégico para repensar no solo los contenidos que se enseñan, sino también las formas de construir significado matemático y de articular teoría y práctica en contextos educativos cada vez más diversos y mediados por tecnologías digitales (Scheer, y Mendel, 2023; Pereira, 2019). En este escenario, la enseñanza de conceptos matemáticos abstractos, como los números complejos, continúa representando un desafío relevante, tanto por su complejidad epistemológica como por las dificultades persistentes que se evidencian en estudiantes universitarios y futuros docentes (Akar et al., 2023; Seloane et al., 2023).

La comprensión de los números complejos ha sido ampliamente documentada como problemática en distintos niveles de la educación superior, especialmente por la tendencia a abordarlos desde una perspectiva predominantemente procedimental, lo que conduce a una comprensión fragmentada y poco integrada del objeto matemático (Buehler, 2014). Investigaciones recientes muestran que el uso de tecnologías digitales y entornos de aprendizaje mediados, como GeoGebra o sistemas algebraicos computacionales, puede favorecer la construcción de significados más integrados y visuales en torno a los números complejos (Gaona y López, 2022; Seloane et al., 2023). Estas dificultades adquieren especial relevancia en la formación inicial docente, ya que los significados construidos en esta etapa condicionan las prácticas de enseñanza posteriores y la forma en que los futuros profesores introducen y legitiman este sistema numérico en la educación escolar (Akar y Belin, 2024).

Desde una mirada histórico-epistemológica, la emergencia de los números complejos implicó una profunda transformación en la noción de número, al cuestionar concepciones clásicas asociadas a la cantidad, la medida y el orden total. La aceptación de la unidad imaginaria y la necesidad de una representación bidimensional introdujeron nuevas formas de pensar los objetos matemáticos, integrando dimensiones algebraicas, geométricas y estructurales (Chavez, 2014; Harel, 2013; Nordlander y Nordlander, 2011). No obstante, estos avances históricos no siempre se reflejan en la enseñanza contemporánea, lo que genera tensiones cognitivas que persisten en la comprensión de estudiantes y futuros profesores (Brownlee et al. , 2001; Lammassaari et al., 2021).

En paralelo, el desarrollo de entornos virtuales de aprendizaje ha abierto nuevas posibilidades para la enseñanza de la matemática en el siglo XXI, especialmente en la formación inicial docente (Oner, 2020; Holmes, 2009; Galiakberova et al., 2020). Más allá de su carácter tecnológico, la virtualidad ofrece oportunidades para diseñar experiencias de aprendizaje que favorezcan la exploración de múltiples representaciones, la interacción entre pares, la explicitación de argumentos y la reflexión sobre los significados matemáticos (Schwarts et al., 2024; Castelló et al., 2020). Sin embargo, el potencial innovador de estos entornos no radica únicamente en el uso de plataformas digitales, sino en los marcos teóricos y didácticos que orientan el diseño de tareas y el análisis de los procesos de comprensión que en ellos se desarrollan (Davis et al., 2019; Yoon et al., 2023).

En este sentido, la teoría de los Modos de Pensamiento propuesta por Sierpinska (2000) constituye un aporte relevante para la investigación en educación matemática del siglo XXI, al proponer una concepción dinámica de la comprensión matemática basada en la interacción entre el pensar práctico y el pensar teórico, así como en la articulación de diversas formas de pensar un mismo objeto matemático (Dogan-Dunlap, 2010; Çelik, 2015; Şimşek y Turanlı, 2024). Desde esta perspectiva, las dificultades de comprensión no se explican por la ausencia de conocimientos, sino por la falta de articuladores que permitan transitar entre distintos modos de pensar y otorgar coherencia a los significados construidos (Açıkyıldız y Kösa, 2021; Araya-González, 2019).

El presente artículo se inscribe en este marco y se propone como una contribución al número especial conmemorativo de los 20 años de la *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, al abordar una experiencia innovadora en la enseñanza de la matemática en modalidad virtual. El objetivo del estudio es describir la articulación de los modos de pensar los números complejos que evidencian futuros profesores de matemática durante un curso virtual orientado al desarrollo de un pensar Práctico y Teórico de este sistema numérico (conjunto numérico provisto de estructuras algebraica, de orden y topológica), poniendo en evidencia el potencial formativo de los entornos virtuales diseñados desde una perspectiva histórico-epistemológica y cognitiva (Bagley y Rabin, 2016; Patiño et al., 2023).

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Los Modos de Pensamiento

La teoría Modos de Pensamiento, desarrollada por Sierpinska (2000) y Sierpinska et al. (2002), constituye un marco cognitivo para interpretar la comprensión de fragmentos matemáticos, inicialmente en el Álgebra Lineal y posteriormente extendido a otros dominios de la matemática. Esta teoría se fundamenta en la distinción entre Pensar Práctico (PP) y Pensar Teórico (PT), inspirada en la diferenciación vigotskiana entre conocimientos cotidianos y científicos (Vygotsky, 1995), y orientada a describir el acto de conocer más que sus productos.

El PP se caracteriza por su orientación a la acción y a la obtención de resultados concretos, movilizando procedimientos, decisiones y cursos de acción sobre un fragmento matemático. En contraste, el PT se desarrolla en un plano reflexivo, en el que el pensamiento se vuelve objeto de análisis, permitiendo la construcción de sistemas conceptuales, relaciones entre conceptos y validaciones epistemológicas (Sierpinska et al., 2002; Sierpinska, 2004a). Cabe señalar que la distinción PP-PT no es ontológica, sino epistemológica, pues no se trata de tipos de pensamiento excluyentes, sino de formas complementarias de relación entre el pensamiento y su objeto (Sierpinska, 2005), cuya interacción resulta indispensable para la comprensión del Álgebra Lineal.

Un aporte central de esta perspectiva es que la comprensión de un fragmento matemático no se explica únicamente por la oposición entre PP y PT, sino por la existencia de una variedad de Modos de Pensar, entendidos como distintas formas de ver y otorgar significado a un mismo objeto matemático (Sierpinska, 2000; Parraguez et al., 2021). A partir de un análisis histórico-epistemológico del Álgebra Lineal, Sierpinska (2000) identificó tres modos principales: sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, los cuales no constituyen etapas de desarrollo, sino modos complementarios que coexisten y cuya interacción es clave para la comprensión.

Estos modos de pensar no deben confundirse con registros de representación semiótica (Duval, 2017), ya que implican perspectivas epistemológicas distintas sobre los objetos matemáticos, aun cuando movilicen representaciones similares. Las dificultades de comprensión surgen, en muchos casos, cuando los sujetos permanecen anclados en un solo modo o no logran transitar entre ellos (Sierpinska, 2000). En rigor, los Modos de Pensar F corresponden a distintas maneras de operar y otorgar significado matemático al objeto F.

En este contexto, la teoría introduce la noción de articuladores, definidos como elementos matemáticos que permiten el ir y venir entre distintos modos de pensar, favoreciendo la interacción entre el PP y el PT y la superación de obstáculos epistemológicos (Parraguez et al., 2021). La identificación de estos articuladores constituye un problema didáctico central, pues permite comprender cómo los sujetos construyen significados y cómo se organiza la interacción de modos de pensar en la actividad matemática.

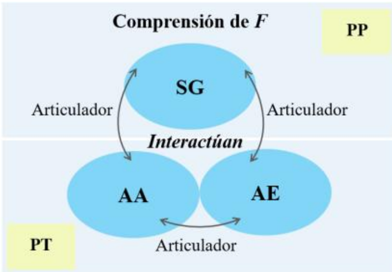


Figura 1: *Modos de Pensamiento en interacción para la comprensión del Álgebra Lineal*

La teoría Modos de Pensamiento no se ha limitado al estudio de fragmentos del Álgebra Lineal, sino que ha sido extendida a otros dominios mediante el desarrollo de variedades teóricas, conservando el método de análisis, pero proponiendo modos de pensar sustentados en la epistemología de F, como ocurre en investigaciones sobre las cónicas, la derivada o los sistemas numéricos (Parraguez et al., 2021, 2024). Desde esta perspectiva, la comprensión matemática se concibe como un proceso dinámico, sustentado en la interacción entre modos de pensar y mediado por articuladores que hacen posible dicha interacción (ver Figura 1).

2.2 Los Modos de Pensar los números complejos

Desde una perspectiva histórico-epistemológica, el desarrollo de los números complejos evidencia la coexistencia de distintas formas de pensar este sistema numérico (Randolph y Parraguez, 2019), las cuales emergen en respuesta a tensiones conceptuales y a la superación de obstáculos epistemológicos. En particular, la aceptación de

20 AÑOS
REIEC
NIECYT
UNICEN
REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666
Número especial - 20 Años REIEC

las cantidades imaginarias y su consolidación como un sistema numérico implicó trascender concepciones arraigadas del número como cantidad medible y como entidad que habita exclusivamente en la recta numérica, dando lugar a nuevas formas de pensamiento algebraicas, geométricas y estructurales.

El análisis histórico permite identificar dos obstáculos epistemológicos persistentes en la comprensión de los números complejos: (i) la concepción del número como cantidad o magnitud, que impide aceptar raíces cuadradas de números negativos, y (ii) la idea de que los números habitan necesariamente en una recta totalmente ordenada, lo que dificulta la incorporación de una geometría propia del número complejo. Estos obstáculos, presentes tanto en la historia de la matemática como en la cognición de estudiantes que aprenden estos temas, se manifiestan en el rechazo de los números complejos como números propiamente tales (Bagni, 2001; Pardo y Gómez, 2007).

Asumiendo como problemática central la superación de este par de obstáculos, se propone una variedad de la teoría de los Modos de Pensamiento (Sierpinska, 2000) aplicada al dominio de los números complejos, caracterizando cuatro modos de pensar que emergen de la tensión e interacción entre el PP y el PT: el Modo Geométrico-Gráfico *estático* (GG*e*), el Modo Geométrico-Gráfico *dinámico* (GG*d*), el Modo Analítico-Aritmético (AA) y el Modo Analítico-Estructural (AE).

El Modo GG*e* se sustenta en una interpretación sintética de los números complejos como puntos o líneas dirigidas en el plano complejo, con ejes real e imaginario perpendiculares, siguiendo las ideas de Wessel, Argand y Gauss. En este modo, un número complejo se concibe como una imagen directa en el plano, privilegiando la localización y representación estática del objeto. Por su parte, el Modo GG*d* introduce el movimiento como elemento central, interpretando las operaciones sobre números complejos como transformaciones geométricas: traslaciones, dilataciones y rotaciones. Así, por ejemplo, multiplicar por el número *i* se comprende como una rotación de 90°, lo que permite operar sin recurrir necesariamente al cálculo aritmético explícito.

El Modo AA se fundamenta en el tratamiento algebraico de los números complejos, apoyándose en expresiones simbólicas como $a + bi$, la forma polar o exponencial, y en procedimientos algorítmicos para realizar operaciones y resolver ecuaciones. En este modo, el énfasis está en el cálculo y en la manipulación simbólica, por ejemplo, al multiplicar dos números complejos término a término o al resolver ecuaciones del tipo $z^x = w$.

Finalmente, el Modo AE concibe a los números complejos como elementos de una estructura algebraica dotada de propiedades, más allá de sus componentes real e imaginaria. En este modo, se privilegia el razonamiento basado en propiedades y teoremas, como el Teorema de De Moivre o la interpretación del módulo como norma euclidiana. Por ejemplo, al resolver ecuaciones del tipo $|z| = r$, el estudiante reconoce que el conjunto solución corresponde a una circunferencia en el plano complejo, anticipando propiedades antes de realizar cálculos específicos.

Estos Modos de Pensar no deben entenderse como etapas sucesivas ni excluyentes, sino como formas complementarias de ver y entender los números complejos, cuya interacción es condición para su comprensión. En este marco, el problema didáctico central no es identificar qué modo predomina, sino pesquisar los articuladores matemáticos que permiten el tránsito entre modos —por ejemplo, entre el tratamiento aritmético y la interpretación geométrica— favoreciendo la superación de los obstáculos epistemológicos y la construcción de significados coherentes del sistema de los números complejos (ver Figura 2).

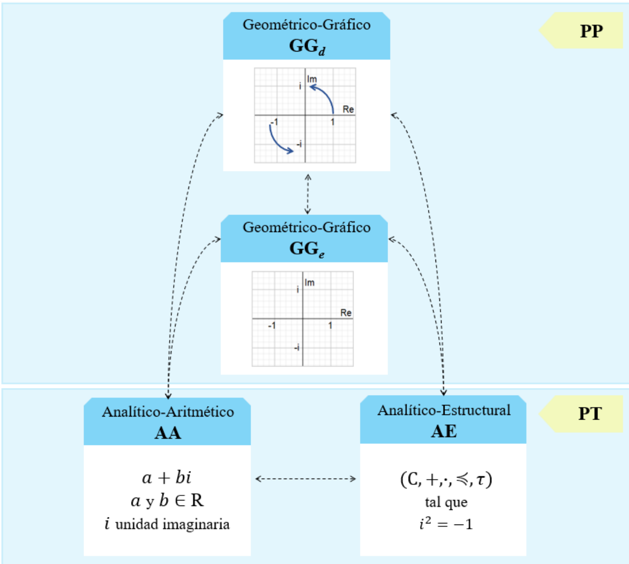


Figura 2: *Modos de Pensar los números complejos*

El carácter algebraico, geométrico y estructural de los números complejos, exige la articulación de múltiples formas de pensamiento para su comprensión.

3. METODOLOGÍA

3.1 Enfoque y tipo de investigación

La presente investigación se enmarca en un enfoque cualitativo de carácter interpretativo (Creswell, 2012), orientado a comprender y describir los Modos de Pensar los números complejos que movilizan profesores de matemática en formación inicial durante la resolución de tareas matemáticas en el contexto de un curso virtual. Desde esta perspectiva, la comprensión matemática se concibe como un fenómeno subjetivo, dinámico y construido, al que se accede mediante la interpretación de producciones discursivas y matemáticas situadas en un contexto formativo específico.

El diseño adoptado corresponde a un estudio de caso (Stake, 2010; Yin, 2014), en tanto se busca desarrollar una comprensión profunda y situada de un caso particular, un curso virtual de números complejos dirigido a futuros profesores de matemática, concebido como un entorno privilegiado para observar la interacción entre el PP (GG*e* y GG*d*) y el PT (AA y AE), así como la emergencia de distintos modos de pensar este sistema numérico. En coherencia con el propósito del estudio, el caso cumple una función instrumental, ya que permite indagar un fenómeno didáctico más amplio, ligado a la comprensión de los números complejos desde la teoría Modos de Pensamiento.

3.2 Curso virtual y participantes

El estudio se desarrolló en el contexto de un curso virtual de números complejos, impartido en modalidad e-learning e interinstitucional. El curso tuvo una duración aproximada de 40 horas pedagógicas, distribuidas en 17 semanas, e integró instancias sincrónicas y asincrónicas bajo un enfoque de clase invertida (Güler et al., 2022). Las actividades del curso fueron diseñadas a partir del desarrollo histórico-epistemológico (Jankvist, 2009) de los números complejos, abordando dimensiones algebraicas, geométricas y estructurales de este dominio matemático, organizado en 4 unidades, como se muestra en la Figura 3.

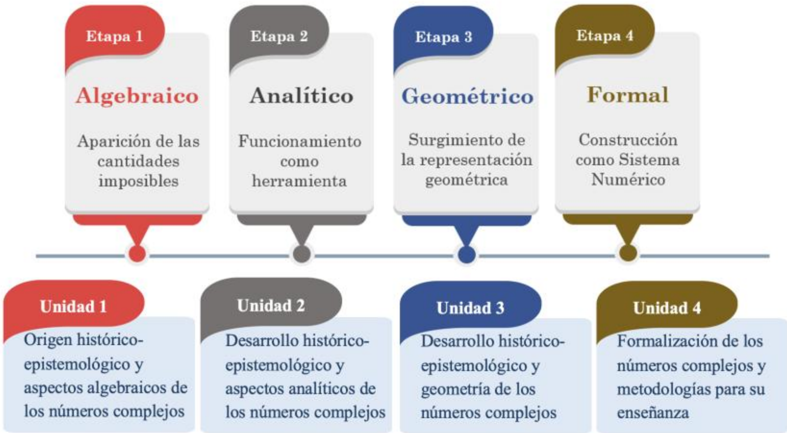


Figura 3: *Etapas histórico-epistemológicas de los números complejos y unidades del curso virtual*

Participaron 22 futuros profesores de matemática (designados como P1 a P22), provenientes de distintas universidades de Chile y de carreras de pedagogía en matemática y afines. La participación fue voluntaria y todos los participantes otorgaron su consentimiento informado para el uso de los registros con fines de investigación. Este grupo constituye el caso de estudio analizado en el presente artículo, dado que ofrece condiciones favorables para observar la diversidad de Modos de Pensar y sus articulaciones en un contexto formativo específicamente diseñado para profundizar la comprensión de los números complejos.

3.3 Técnicas de recogida de datos

La recogida de datos se realizó mediante técnicas cualitativas, principalmente a través de la observación participante y del análisis de producciones matemáticas escritas generadas en el marco del curso. En particular, se utilizaron como fuentes de información videograbaciones de las sesiones sincrónicas del minicurso (realizadas en la plataforma Zoom), que incluyeron momentos de trabajo plenarios y de trabajo colaborativo en grupos pequeños; producciones escritas de los participantes, obtenidas a partir de una evaluación escrita al final del curso y de tareas desarrolladas durante sesiones sincrónicas específicas; registros digitales de interacciones y respuestas en herramientas colaborativas (por ejemplo, Jamboard), utilizadas durante el desarrollo de las actividades.

Las tareas utilizadas en el curso fueron de carácter abierto, en el sentido de Sierpinska (2004b), y diseñadas para favorecer la explicitación de argumentos, procedimientos y significados asociados a los números complejos. La elección de estas tareas respondió a su potencial para movilizar distintos Modos de Pensar y para evidenciar transiciones y articulaciones entre ellos. Cada tarea fue revisada por un matemático, una didacta de la matemática y una profesora de matemáticas.

Dado el propósito de este reporte de investigación, consideramos en los análisis y resultados una tarea inicial del curso (T0) y tres tareas que formaron parte de la evaluación final del curso (T1, T2 y T3), las que brindan mejores oportunidades para describir la comprensión de los números complejos desde los modos de pensar GG*e*, GG*d*, AA y AE. En la Tabla 1 se presentan las tareas.

Tabla 1

Tareas que utilizamos en este estudio

T0 ¿Qué son los números complejos?
T1 Considere el problema de encontrar dos números cuya suma y producto sean ambos iguales a 2. A continuación se presenta una posible solución para este problema. Solución propuesta: *Una solución al problema planteado es*

$x = \sqrt{2i}; \, y = \sqrt{-2i}$

Para demostrar que estos números son solución, partimos notando que

$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$

y sacando raíz cuadrada a ambos lados obtenemos

$1 + i = \sqrt{2i}$

Por otro lado

$(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$

y sacando raíz cuadrada a ambos lados obtenemos

$1 - i = \sqrt{-2i}$

Usando esto, obtenemos

$x + y = \sqrt{2i} + \sqrt{-2i} = (1+i) + (1-i) = 2$

y, por otro lado

$xy = \sqrt{2i}\sqrt{-2i} = \sqrt{4} = 2.$

Esto prueba que

$x = \sqrt{2i}, \, y = \sqrt{-2i}$

Tienen suma y producto igual a 2, y por tanto son solución al problema planteado.

Preguntas

a. ¿Es correcta la solución propuesta y el procedimiento empleado? ¿Por qué?

b. ¿Cómo resolverías tú el problema planteado? Compáralo con la solución propuesta.

T2

Considera la siguiente situación:

Violeta, estudiante de enseñanza media [secundaria], dice que los números complejos se pueden ordenar por tamaño y escribe

$$i < 2i < 1 + 2i < 2 + 2i$$

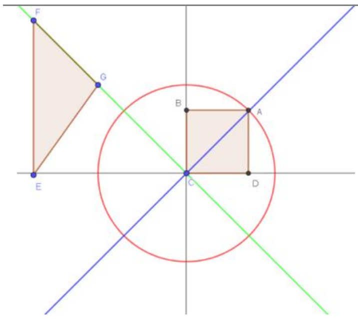
¿Es correcto o incorrecto lo que plantea Violeta? Explica tu respuesta.

T3

En la siguiente imagen se representan algunas figuras geométricas en el plano de Argand (plano complejo).

Considere la siguiente información:

- La circunferencia de color rojo es la circunferencia unitaria (centrada en 0 y con radio 1)
- La recta de color azul es la diagonal, que pasa por 0 y forma un ángulo de 45° con el eje real positivo.
- La recta de color verde es la anti-diagonal, que pasa por 0 y forma un ángulo de 135° con el eje real positivo.
- El polígono de vértices A, B, C, D es un cuadrado con A ubicado en la intersección de la circunferencia unitaria y la recta diagonal, en el primer cuadrante, y C ubicado en el origen.
- El triángulo EFG tiene a E ubicado en el eje real negativo, G y F ubicados en la recta anti-diagonal, y además el segmento EF paralelo al eje imaginario.



a. Dibuje las figuras geométricas que se obtienen al multiplicar por el número complejo *i - 1*

b. Dibuje las figuras geométricas que se obtienen al elevar al cuadrado; es decir, al aplicar la transformación compleja $g(z) = z^2$

A continuación, presentamos en la Tabla 2 un análisis a priori de las tareas presentadas en la Tabla 1.

Tabla 2: *Análisis a priori de las Tareas*

Tarea	Argumentos observables	MP
T0 Definir los números complejos	Definen y ejemplifican qué son los números complejos. Por ejemplo, se refieren a ellos como: Un punto en el plano complejo; Número de la forma $a + bi$; Cuerpo algebraicamente cerrado	 GG*e* AA AE
T1 Desarrollar y analizar operaciones de números complejos en el contexto de raíces cuadradas y ecuaciones cuadráticas	Determinan que las soluciones planteadas no son correctas. Luego, argumentan que, por ejemplo, $\sqrt{2i}\sqrt{-2i} \neq \sqrt{4}$, pues la propiedad $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ no siempre es verdadera en los números complejos Al resolver la tarea, plantean la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 2$ encontrando $1 + i$ e $1 - i$ como soluciones	AA-AE AA
T2 Explicar la relación de orden de los números complejos en el contexto de la definición de un orden ad-hoc	Determinan que el orden es correcto si se considera “el tamaño” como el módulo del número complejo. Calculan el módulo de los números complejos utilizando, por ejemplo, $\lvert z \rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$	AA-AE

	Argumentan que los números complejos no heredan el orden de los números reales, pues no hay compatibilidad de la multiplicación de números complejos con la relación de orden de los reales. No obstante, puede definirse un orden *ad-hoc*.	AE
T3 Desarrollar operaciones de números complejos en el contexto de transformaciones complejas en el plano complejo	Multiplican los vértices del cuadrado y el triángulo por $(i-1)$, usando sus coordenadas, analíticamente. Luego dibujan las figuras resultantes en el plano complejo. Realizan el mismo procedimiento para obtener las figuras al aplicar la transformación $g(z) = z^2$	AA-GG*e*
	Desarrollan la tarea en GeoGebra, utilizando herramientas como reflexión y rotación, a través de ángulos y módulos de números complejos.	GG*d*

Nota. MP es Modos de Pensamiento

3.4 Técnicas de análisis de datos

El análisis de los datos se desarrolló mediante un análisis de contenido (Mayring, 2015), que permitió la interpretación del desempeño de los participantes en las tareas de números complejos a través de la confrontación de un análisis *a priori* con uno *a posteriori* que incluyó categorías del pensamiento derivadas de los Modos de Pensar los números complejos. Un ejemplo de este análisis lo presentamos en la Figura 4.

P_m	Respuesta en Tm-2	Modo de Pensar
$P_{m\text{-}2}$	Es correcto lo que dice Violeta, ya que ella dice "que se pueden ordenar por su tamaño". Si miramos esos valores como módulos es correcto lo que planeta, $i < 2i < 1+2i < 2+2i$ $\lvert i\rvert < \lvert 2i\rvert < \lvert 1+2i\rvert < \lvert 2+2i\rvert$ $1 < 2 < \sqrt{5} < 2\sqrt{2}$	AA Cálculo de $\lvert z\rvert$

Figura 4: *Extracto de matriz de análisis de las tareas*

Además, se empleó una escala de valoración para analizar T1, T2 y T3 de la evaluación final del curso, la que nos permitió obtener porcentajes de logro del desempeño de los participantes en estas tareas. En la Tabla 3, se presenta la escala de valoración utilizada.

Tabla 3: *Escala de valoración utilizada para analizar T1, T2 y T3*

Indicador	% de logro
El análisis de la problemática se presenta de manera completa y ordenada. Responde y justifica de manera correcta.	100%
Responde de manera parcial, la justificación es incompleta, o los argumentos expuestos contienen pequeños errores.	70%
La respuesta es incompleta, o los argumentos empleados contienen errores o imprecisiones.	35%
No responde, no explica o no justifica.	0%

4. RESULTADOS

4.1 Modos de Pensar evidenciados al inicio del curso

Una de las primeras tareas propuestas en el curso virtual de números complejos a los participantes fue T0, en la que se les solicitó que respondieran qué son los números complejos. Luego de organizar las respuestas podemos notar principalmente la manifestación de un modo de pensar AA de los números complejos asociado a las nociones de conjunto de números, extensión numérica, números de la forma *a* + *bi*, operación o combinación de números reales e imaginarios. Las Figuras 5 y 6 presentan las respuestas de P4 y P11 a T0 que evidencian el modo AA.

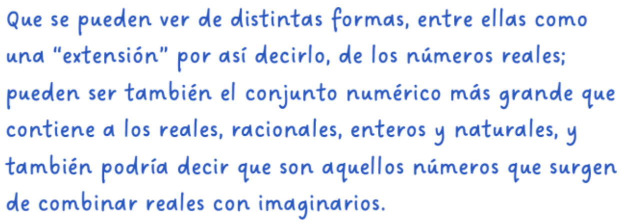


Figura 5: *Respuesta de P4 en T0*

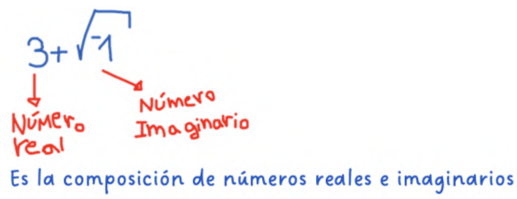


Figura 6: *Respuesta de P11 en T0*

Cabe notar, en la respuesta de P4, la referencia a "conjunto numérico más grande que contiene a los reales, racionales, enteros y naturales", ya que otros participantes también señalaron la idea de contención de conjuntos de manera similar, incluso visualizándolo en un diagrama de conjuntos. En la Figura 7 se muestran una de estas respuestas.

20 AÑOS REIEC NIECYT UNICEN
REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666
Número especial - 20 Años REIEC

Que son los números que no están definidos en el conjunto real y por lo tanto ocupan a los números imaginarios junto a los números reales para hacer ecuaciones.

Figura 7: *Respuesta de P9 en T0*

Se observa que los participantes ven y entienden a los números complejos como un conjunto de números formado a partir de la extensión de otros dominios numéricos, en la que se van incorporando nuevas clases de números. Si bien los diagramas visualizan esta idea, en su diseño es posible notar inconsistencias, pues ¿qué números representa el espacio en que los informantes escriben R o números reales? Además, volviendo a la idea de P4 sobre el "conjunto numérico más grande", cabe recordar que los números complejos tienen la misma cardinalidad que los números reales, por tanto, en el diagrama de la Figura 7 se observa como un elemento obstaculizador para el modo AE, en tanto invisibiliza a los números complejos como estructura numérica.

Un caso interesante es lo planteado por P1, como muestra la Figura 8, pues se refiere a los números complejos como una "cifra" que se obtiene al "sumar" una parte real con una imaginaria, lo que evidencia una dificultad en la interpretación del signo + en la forma algebraica *a* + *bi*. El matemático W. Hamilton ya había señalado y enfatizado que el signo + era un "accidente histórico" y que *a* + *bi* no significa que a *a* se le añada *bi*, en el sentido de 2 + 3, por ejemplo. Así, es posible evidenciar en este participante un obstáculo asociado al signo + en la notación *a* + *bi* de un número complejo.

Otro elemento que destacar es que los participantes no solo relacionan los números reales y los números complejos a través de la contención de conjuntos, sino que también mediante la clausura algebraica que implica a las ecuaciones, pues como indica P14, "toda ecuación tiene solución en él". Este hecho, también fue referido por otros estudiantes haciendo alusión a la raíz cuadrada de un número negativo.

Este conjunto hace alusión a un grupo de cifras obtenidas al sumar una parte real y una imaginaria. Poseen distintas formas de expresión, ya sean, polar, vectorial, binomial siendo esta la más común ($a + bi$, siendo a parte real y b parte imaginaria).

Figura 8: *Respuesta de P1 en T0*

Por ejemplo, P6 indica que "los números complejos pertenecen al conjunto de los números complejos, compuestos de una parte imaginaria *i* y una real *a*: *a* + *bi*; dan solución a la problemática cuando existe una raíz con cantidad subradical negativa e índice par, pues no tiene solución en el conjunto R [de los números reales]". También, P5 señala que, "dentro de los números reales, existen reglas como que la raíz de índice par no puede tener una cantidad subradical negativa. Sin embargo, existen los números complejos que surgen de esta prohibición en los reales". Asimismo, P8 añade "bueno, lo primero que me viene a la mente, es que son un conjunto de números que nos ayudan a resolver problemas que no tienen solución en el cuerpo de los reales. Si me pidieran o preguntaran por su composición explicaría que tienen su parte real y su parte imaginaria *a* + *bi* ". En la Figura 9 presentamos la respuesta de P13, quien transita de los números reales a los números complejos a partir de las raíces cuadradas de números negativos.

Los números complejos son un conjunto de números que incluyen a todos los números que conocemos, es decir a los números reales, además se agrega el concepto de unidad imaginaria, que corresponde a la raíz cuadrada de -1. Sabemos que en los reales no existen las raíces cuadradas de números negativos, pero en los complejos sí. De esta manera se construyen los números complejos que se expresan de la forma $a + bi$ donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria. Existen otras formas de representar los números complejos, como por ejemplo en forma de par ordenado o en forma trigonométrica.

Figura 9: *Respuesta de P13 en T0*

Del análisis de la respuesta de P13, nuevamente evidenciamos la idea de contención de los números reales en los números complejos, pero, además, vemos que la unidad imaginaria es entendida como $i = \sqrt{-1}$.En esta línea, P3 se refirió también a la unidad imaginaria como presenta la Figura 10.

El hecho de que P3 indique que *i* es una de las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ conforma un indicio del modo de pensar AE de los números complejos, ya que reconoce que no es la única solución de la ecuación. En relación a este modo de pensar, hubo algunas manifestaciones. En lo específico, en la Figura 11 se presentan las respuestas de P10 y P17 situadas en AE.

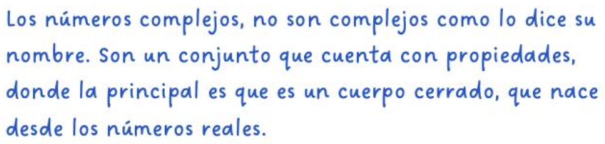
Diría que es un conjunto que contiene a los reales y que cumple que todos sus elementos pueden ser representados de la forma $a + bi$, donde i es una de las soluciones de la ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

Figura 10: *Respuesta de P3 en T0*

20 AÑOS REIEC NIECYT UNICEN
REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666
Número especial - 20 Años REIEC

P10



P17

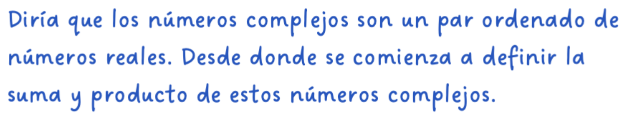


Figura 11: *Respuestas de P10 y P17 en T0*

P17 se refiere a operaciones suma y producto que es posible definir en los números complejos. Además, P10 se refiere a la clausura algebraica en los números complejos. Estos elementos, más allá de un cálculo, reflejan un modo de pensar estructural, que involucra propiedades de los números.

Por último, también encontramos manifestaciones de un modo de pensar GG*e* de los números complejos. Específicamente, en la respuesta de P7, quién fue el único informante en situar su pensamiento desde los modos AA, GG*e* y AE en esta tarea. La Figura 12 muestra la respuesta de P7 desde estos tres modos de pensar.

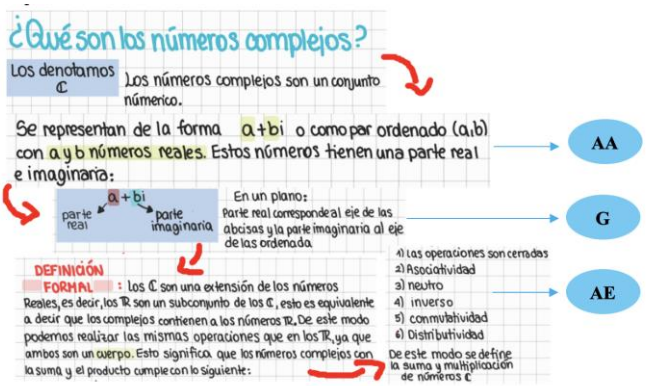


Figura 12: *Respuesta de P7 en T0*

Se aprecia, en esta respuesta, como la noción de conjunto lleva a la P7 a transitar del modo de pensar AA al modo de pensar AE de los números complejos, cuando señala que “podemos realizar las mismas operaciones que en R, ya que ambos son un cuerpo”, y además añade las propiedades que en los números complejos se cumplen con la suma y el producto. Sobre el modo de pensar GG*e* se refiere al plano complejo con un eje que representa la parte real y otro la parte imaginaria, que asocia con la notación $a + bi$ del modo de pensar AA. En este sentido, observamos que las nociones de parte real (Re(z)) y parte imaginaria (Im(z)) le permiten transitar del modo AA al modo GG*e*.

En resumen, los participantes situaron su pensamiento principalmente en el modo AA para responder qué son los números complejos, manifestando la notación $a + bi$ y reconociendo a i como la unidad imaginaria tal que $i = \sqrt{-1}$ o como solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Además, vieron y entendieron a los números complejos como una extensión de números reales y/o combinación de números reales e imaginarios, toda vez que señalaron a los números reales contenidos en los números complejos. Respecto a ello, si bien puede hacerse una identificación de un subconjunto de los números complejos, a saber $a + 0i$, con los números reales, el pensar a los números complejos como un conjunto que contiene a los números reales invisibiliza sus estructuras algebraica, ordenada y topológica, en las que se definen operaciones, relaciones y sus respectivas propiedades. Por otro lado, en menor medida, los estudiantes manifestaron un modo de pensar AE para referirse a las operaciones suma y producto, o a la clausura algebraica relacionada con la solución de ecuaciones; mientras que, el modo de pensar GG*e* solo se evidenció en uno de los informantes relacionado al plano complejo. Cabe señalar que el modo de pensar GG*d* no fue observado. La Figura 13 muestra un resumen de lo evidenciado a través del análisis de T0.

4.2 Modos de Pensar evidenciados al final del curso

De los 22 participantes del curso virtual, 17 respondieron a la evaluación final obteniendo una calificación promedio de 4,9 (en una escala de 1 a 7). La Tabla 4 muestra los puntajes promedios obtenidos y los porcentajes de logro alcanzados por el grupo de informantes, siendo T3 la tarea más descendida.

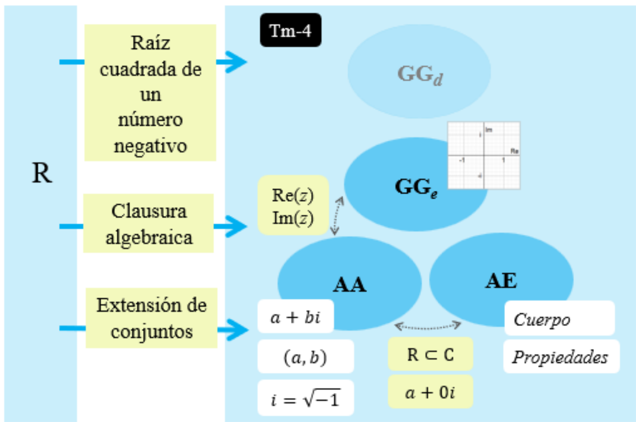


Figura 13: *Modos de Pensar y articuladores evidenciados en T0.*

Tabla 4: *Porcentaje de logro en la evaluación final del curso*

	T1 (AA)	T2 (AE)	T3 (GG*e*-GG*d*)
Puntaje total	20	20	20
Puntaje promedio obtenido	14,24	15,76	8,65
Porcentaje de logro	71%	79%	43%

Análisis de respuestas a T1

Como se precisó en el análisis a priori, la T1 permitió indagar en el modo de pensar AA y sus interacciones, mediante la presentación de la resolución de un problema algebraico que implicó la aplicación de operaciones aritméticas en el dominio de los números complejos. En general, los P_m respondieron de manera parcial a esta tarea, con una justificación incompleta o con algunos errores en sus argumentos. La mayoría consideró que las soluciones y el procedimiento propuesto al problema eran correctos, lo cual no era lo esperado. No obstante, al menos dos de los participantes lograron situarse no solo en un modo AA de los números complejos, sino que articularlo con AE para responder exitosamente a la tarea. Así se aprecia en la respuesta de uno de estos estudiantes en la Figura 14.

a) Por la forma en que está planteada la solución, considero que no es correcta del todo.
Esto se debe a que se responde que los números que cumplen dicha condición son $x = \sqrt{2i}, y = \sqrt{-2i}$.

En un contexto de números complejos, la raíz cuadrada de un número complejo puede tomar dos valores distintos → **AE**

Particularmente, $\sqrt{2i} = \{1+i, -1-i\}$
$\sqrt{-2i} = \{1-i,\ i-1\}$

Si consideramos $x = \sqrt{2i} = -1-i,\ y = \sqrt{-2i} = i-1$, entonces $x + y = (-1-i) + (i-1) = -2 \neq 2$. → **AA**

Si la respuesta planteada fuera $x = 1+i, y = 1-i$, entonces sí sería correcta la solución.

Figura 14: *Respuesta de P3 al inciso a. en T1*

Es posible notar que el informante primero sitúa el concepto de raíz cuadrada en el dominio de los números complejos y luego utiliza el hecho de que existen exactamente dos números complejos z, distintos, tales que $z^2 = 2i$. Esto evidencia un modo de pensar AE de los números complejos, asociado a un teorema que explicita que en general $w^n = z$, tendrá n soluciones distintas en los números complejos. Posteriormente, se observa que el informante fue capaz de articular su pensamiento hacia un modo AA, bajo el cual escribió las raíces cuadradas de $2i$ y $-2i$ y calculó la suma de estas, en su notación de binomios, concluyendo que si se consideran dos de ellas la suma entonces es distinta de 2.

En relación a la correctitud del procedimiento empleado, P1, P3 y P8 señalan en el inciso a) que el procedimiento no es correcto, refiriéndose específicamente al paso en que se multiplicaban las soluciones x e y utilizando la propiedad $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, la que no es siempre verdadera en los números complejos. La Figura 15 presenta el argumento dado por P1.

a) En mi criterio, el procedimiento propuesto no es el correcto ya que no se mencionó el conjunto en el cual se encuentran x e y, y al no definirse dicho conjunto hay operaciones que no están justificadas matemáticamente ya que es de suma importancia saber en qué codominio específicamente se está trabajando, de no ser así, el resultado puede variar según los conjuntos definidos. El error al que me refiero ocurre en el último paso cuando la persona realiza

$$xy = \sqrt{2i}\sqrt{-2i} = \sqrt{4} = 2$$ → **AE**

al hacer esta operación es de suma importancia definir nuestra "área de trabajo", ya que, de no hacerlo, no definimos la operación raíz cuadrada en los complejos.

Figura 15: *Respuesta de P1 al inciso a. en T1*

Es posible apreciar un modo de pensar AE de los números complejos, cuando el informante se refiere al concepto de raíz cuadrada como una función, al indicar que necesario conocer el codominio en que se está trabajando. P3 y P13 fueron más explícitos en este sentido y precisaron un ejemplo como podemos apreciar en la Figura 16.

a) Considero que el procedimiento empleado no es correcto.
En el último paso, se realiza lo siguiente

$$xy = \sqrt{2i}\sqrt{-2i} = \sqrt{4} = 2$$

Note que se utilizó $\sqrt{z} \cdot \sqrt{w} = \sqrt{zw}$ sin verificar que $\sqrt{z}\,\sqrt{w}$ pertenezcan al mismo semiplano que z y w. → **GG$_e$**

Todo se basa en que no definió un codominio específico para la función raíz cuadrada, por lo que no es claro si se cumple o no que

a) Considero que el procedimiento empleado no es correcto.
En el último paso, se realiza lo siguiente

$$xy = \sqrt{2i}\sqrt{-2i} = \sqrt{4} = 2$$

Note que se utilizó $\sqrt{z} \cdot \sqrt{w} = \sqrt{zw}$ sin verificar que $\sqrt{z}\,\sqrt{w}$ pertenezcan al mismo semiplano que z y w. → **GG$_e$**

Todo se basa en que no definió un codominio específico para la función raíz cuadrada, por lo que no es claro si se cumple o no que

Figura 16: *Argumento de P3 sobre la multiplicación de raíces cuadradas en T1*

Cuando el informante se refiere a que z y w pertenezcan al "mismo semiplano" está pensando en la restricción del codominio, específicamente al semiplano $[0, \pi[$ (véase Figura 17). Esta idea representa una manifestación de un modo de pensar GGe que articula con AE, mediante la raíz cuadrada en los números complejos como función, para mostrar que dado el codominio A, es claro que $\sqrt{-2i} = -1 + i \neq 1 - i$.

Otros informantes también se refieren, en el inciso a), a un procedimiento incorrecto, pero lo hacen con imprecisiones. En la Figura 18 puede verse a modo de ejemplo la respuesta de P14.

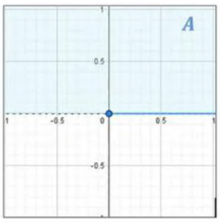


Figura 17: *Interpretación sobre el semiplano de P3*

Otros informantes también se refieren, en el inciso a), a un procedimiento incorrecto, pero lo hacen con imprecisiones. Vemos dos de estas respuestas en la Tabla 4.6.

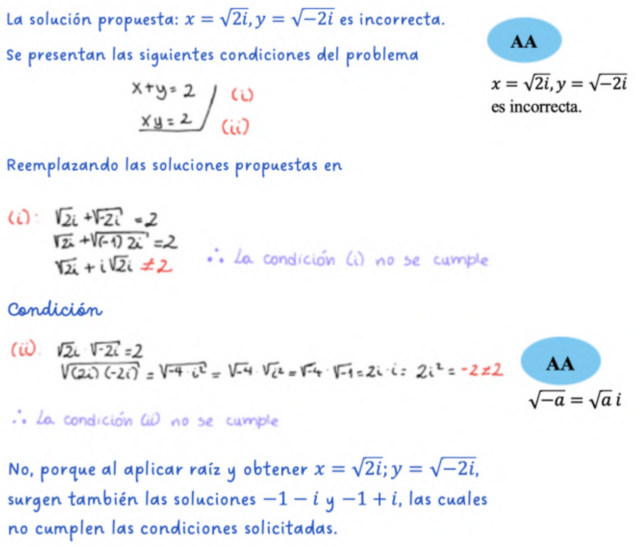


Figura 18: *Respuesta de P14 en T1*

Como se observa, P14 reemplaza $\sqrt{2i}$ y $\sqrt{-2i}$ en las condiciones iniciales del problema y utilizando $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\, i$ establece las igualdades. $\sqrt{-2i} = \sqrt{(-1)2i} = \sqrt{2i}\, i$. Esto evidencia un modo de pensar AA de los números complejos, aunque la conclusión de que $\sqrt{2i} + \sqrt{2i}\, i \neq 2$ revela una dificultad con el signo $+$, que lleva al informante a decir que la suma de las raíces será un número complejo de la forma $a + bi$, con $b \neq 0$, por tanto, no puede ser 2. En este sentido, se evidencia que P14 confunde la notación $a + bi$ con la operación + entre $\sqrt{2i}$ y $\sqrt{-2i}$, la que, de hecho, para un caso, es efectivamente 2.

P15, por su parte, también utiliza que $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\, i$ para decir que $\sqrt{-2i} = \sqrt{2i} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{2i} \cdot i$; no obstante, y al igual que P14 al multiplicar $\sqrt{2i}$ y $\sqrt{2i}\, i$ concluye que su producto no es 2, sino -2, escribiendo en el procedimiento que $\sqrt{2i} \cdot \sqrt{2i} = \sqrt{2i \cdot 2i}$, cuestión que no siempre es verdadera en los números complejos. P14 utiliza esto como justificación, pero P15 logra transitar al modo de pensar AE y explicitar que esa ambigüedad de que la suma fuese 2 y -2 es justamente porque se utilizan las propiedades de las raíces como válidas para los números complejos.

Cabe notar que en ambas respuestas observamos interferencia del pensamiento situado en los números reales, en P14 cuando utiliza la propiedad $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ sin especificar que ello no es siempre válido en los números complejos; y en P15 cuando señala posteriormente que “desconocemos si $(1+i) > 0$ o $(1+i) < 0$”, empleando la relación de orden de los números reales a números complejos. Se interpreta que estos informantes no logran situarse en AE para pensar la raíz cuadrada, por lo que recurren a sus conocimientos previos de este concepto en los números reales.

Respecto al inciso b) en el que se preguntaba cómo resolvería el problema planteado, todos los participantes se situaron en un modo de pensar AA, empleando un sistema de ecuaciones que resolvieron para encontrar las soluciones. La Figura 19 muestra este procedimiento.

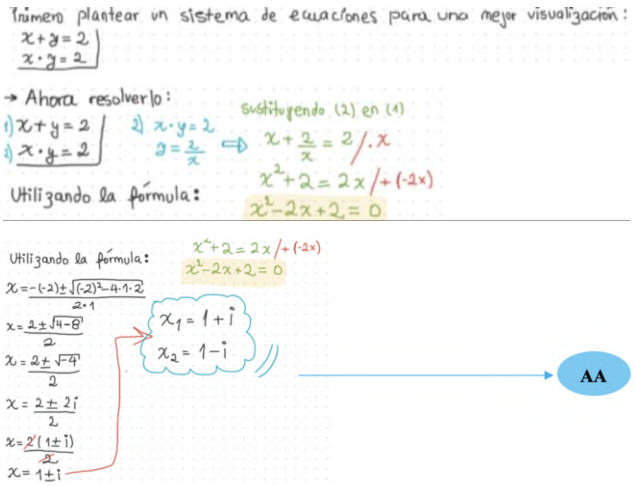


Figura 19: *Respuesta de P4 al inciso b) en T1*

Concluyendo el análisis de las producciones de los participantes en T1, se evidencia que los estudiantes manifiestan un modo de pensar AA al enfrentase al concepto de raíz cuadrada en los números complejos. Algunos de ellos articulan su pensamiento con AE y GG*e* a través de la noción de función raíz cuadrada en los números complejos; mientras que en una gran mayoría se observó una interferencia del pensamiento sobre la raíz cuadrada situado en los números reales. En este sentido, la raíz cuadrada, desde su notación $\sqrt{\ }$, es fuente de dificultades en los números complejos, en tanto varios de los estudiantes no alcanzan AE para conceptualizarla como función en los números complejos. La Figura 20 muestra un resumen de lo evidenciado a través del análisis de T1.

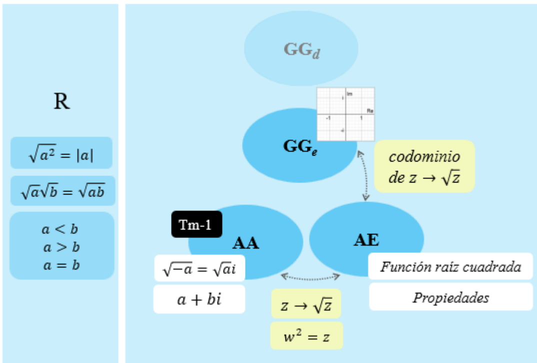


Figura 20: *Modos de Pensar y articuladores evidenciados en T1*

Análisis de respuestas a T2

Se enfoca ahora el análisis en T2. Esta tarea permitió indagar en el modo de pensar AE y sus interacciones, mediante una situación en la que una estudiante hipotética propone un orden para ciertos números complejos. En general, los participantes responden de manera parcial a T2, aunque su desempeño es mejor que en T1, siendo solo una minoría quienes no entregan una justificación completa. La mayoría considera que el orden propuesto por la estudiante es correcto si se especifica algún criterio para ello, logrando articular el modo de pensar AE con AA y GG*e* a través del concepto de módulo, argumento, parte real e imaginaria de un número complejo. La Figura 21 exhibe la respuesta de P3 que argumenta el orden de $i, 2i,\ 1+i$ y $2+2i$ con base en las partes real e imaginaria de los números complejos.

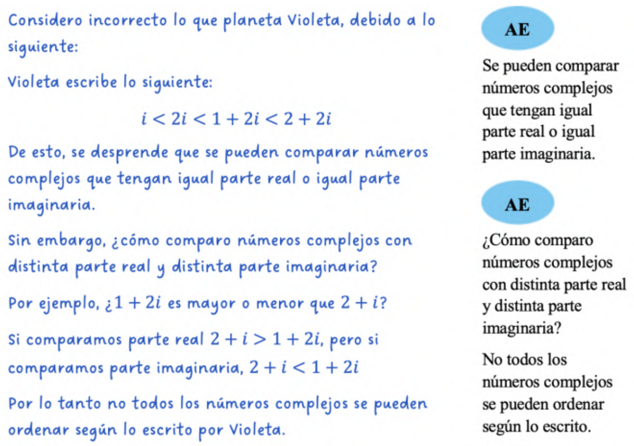


Figura 21: *Respuesta de P3 en T2*

Aunque algunos participantes difieren en que el orden propuesto para *i, 2i, 1+ i, 2 + 2i* es correcto o incorrecto, se observa un acuerdo en que es posible definir un orden *ad-hoc* bajo ciertas restricciones o criterios. Uno de ellos es a partir de las partes real e imaginaria de estos números, comparando cada una de estas respectivamente, lo que funciona para establecer desigualdades entre los números *i, 2i, 1+ i, 2 + 2i*. No obstante, se observa que los estudiantes, fueron más allá planteando cuestionamientos que les permitieron notar ciertos límites sobre esta forma de ordenar números complejos, concluyendo que no es posible generalizarlo. De hecho, P3 se refiere a comparar números complejos con distinta parte real y distinta parte imaginaria y muestra un contraejemplo. P8, también señala qué pasará al comparar los conjugados de números complejos distintos, aunque su ejemplo es confuso pues los conjugados de los números que muestra no son iguales, en ese contexto, tal vez quiso decir el módulo de los números complejos. Además, es posible apreciar que P7 y P9 precisan que los números complejos son un cuerpo ordenado (P7), pero que no es un orden total (P9). La respuesta de este último es especialmente interesante, porque observamos interferencia del pensamiento situado en los números reales, cuando el informante representa números complejos en diagramas de áreas y relaciona el módulo con el valor absoluto, lo cual extiende nociones de los números reales a los números complejos. En este sentido, evidenciamos, en general, una manifestación de un modo de pensar AE de los números complejos, el que fue articulado por P7, P8 y P15 hacia el modo AA y por P15 hacia el modo GG*e*.

También los participantes responden a T2 indicando que el orden propuesto por la estudiante es respecto al módulo de los números complejos, esto debido a que en el enunciado de la tarea decía que los había ordenado por 'tamaño'. Presentamos dos de estas respuestas en la Figura 22.

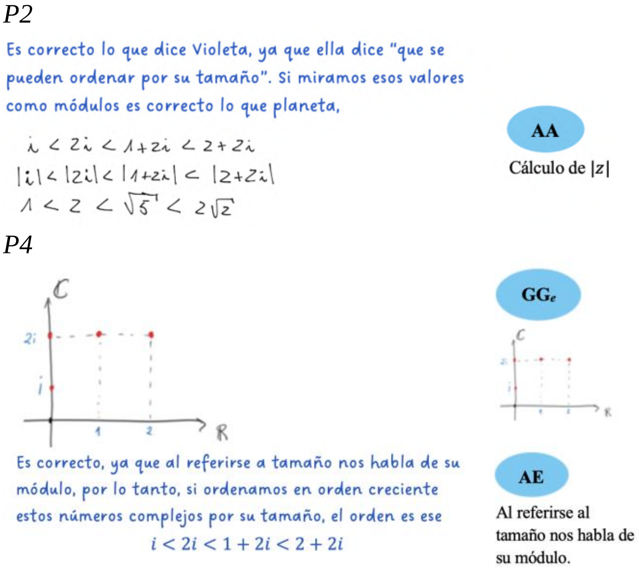


Figura 22: *Respuestas de P2 y P4 en T2*

Tal como se muestra, los informantes articulan el modo de pensar AE de los números complejos, con un modo de pensar AA y GG*e* al reconocer que estos se pueden ordenar de acuerdo al módulo. En el caso del modo de pensar AA, vemos que calculan el módulo utilizando la expresión $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ sin dificultades. Además, observamos que P4 dibuja el plano complejo para indicar los números que han sido ordenados, lo que ya habíamos evidenciado en la respuesta de P15. Por su parte en la respuesta de P17 cabe notar que no solo calcula los módulos y ordena los números de acuerdo a ello, sino que muestra una contradicción. $(-1 < -4)$ al elevar al cuadrado las desigualdades, lo que lleva a decir que hasta "cierto punto de vista" es correcto. Esto lo interpretamos como una manifestación de un modo de pensar AE de los números complejos.

A pesar de que los estudiantes son capaces de precisar un orden a través del módulo de los números, insisten, de manera contradictoria, en que estos "no tienen un orden establecido" o que "no son un conjunto ordenado". Interpretamos de ello que sus expresiones son para referirse a que no tienen un orden como los números reales, pero esto último no es explicitado concretamente.

En lo específico, dos de los participantes manifiestan en sus respuestas los modos de pensar AE, AA y GG*e*. En estos vemos que el concepto de módulo les permite transitar entre estos, cuando lo reconocen como bajo una relación de orden, lo calculan y lo representan en el plano complejo. A continuación, en la Figura 23 vemos la respuesta de P10.

20 AÑOS REIEC NIECYT UNICEN
REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666
Número especial - 20 Años REIEC

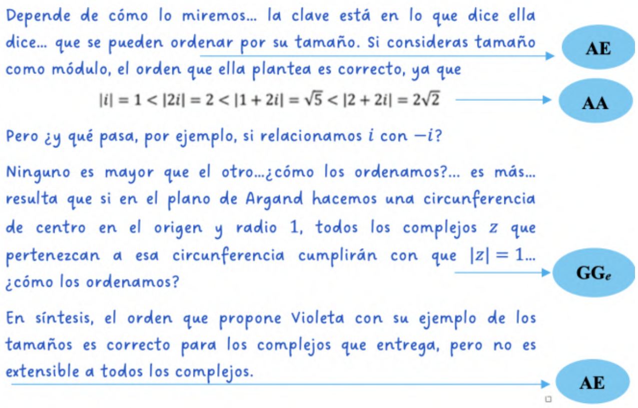


Figura 23: *Respuesta de P10 en T2*

Cabe destacar, en lo expresado por P10, respecto al significado geométrico del módulo de un número complejo ($|z| = 1$), este lo ve y entiende como una circunferencia de centro en el origen y radio 1. Esta noción le permite notar que habrá números complejos con el mismo módulo y por tanto cuestionar la relación de orden planteada, la que no podrá ser extensible al sistema numérico.

Por parte, P11 también evidencia el tránsito entre los tres modos de pensar y en este caso sí precisa que el orden no es como el de los números reales; además, reconoce que existen formas de compararlos, por ejemplo, usando la norma (módulo). El modo de pensar AA se manifiesta en este informante a través del cálculo del módulo, el que luego articula hacia un modo de pensar GG*e* al representar los números complejos y su módulo en el plano.

Concluimos del análisis de T2, que los participantes logran situarse en el modo de pensar AE de los números complejos al precisar que estos son un cuerpo que se puede ordenar (cuerpo ordenado), pero no como los números reales, planteando cuestionamientos acerca de ciertas formas de compararlos o de establecer desigualdades. Además, evidenciamos que articulan su pensamiento hacia los modos AA y luego de este a GG*e*, los que resultan de precisar una relación de orden mediante el módulo o las partes reales e imaginarias de los números complejos. En particular, el tránsito hacia el modo GG*e* se logra al representar los números en el plano y mostrar sus partes reales e imaginarias o sus módulos por medio de líneas dirigidas. En cuanto a dificultades, nuevamente, aunque en menor medida, observamos interferencia negativa del pensamiento situado en los números reales, la que se propicia especialmente por la noción de que los números reales son un subconjunto de los números complejos, acarreando conceptos de los números reales a los número complejos al estar los números reales contenidos en estos últimos. En este caso se hace necesario abordar y reforzar el significado de $\mathrm{R} \subset \mathrm{C}$ en el contexto de los sistemas numéricos. La Figura 24 presenta lo evidenciado a través del análisis de T2.

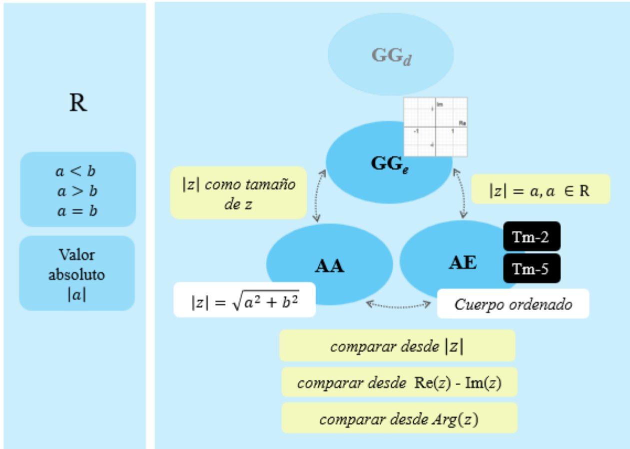
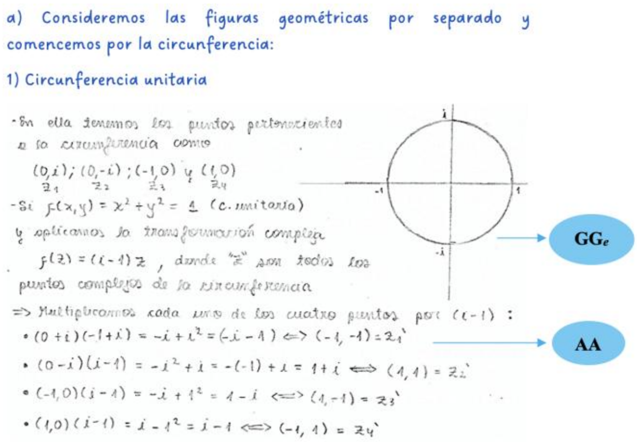
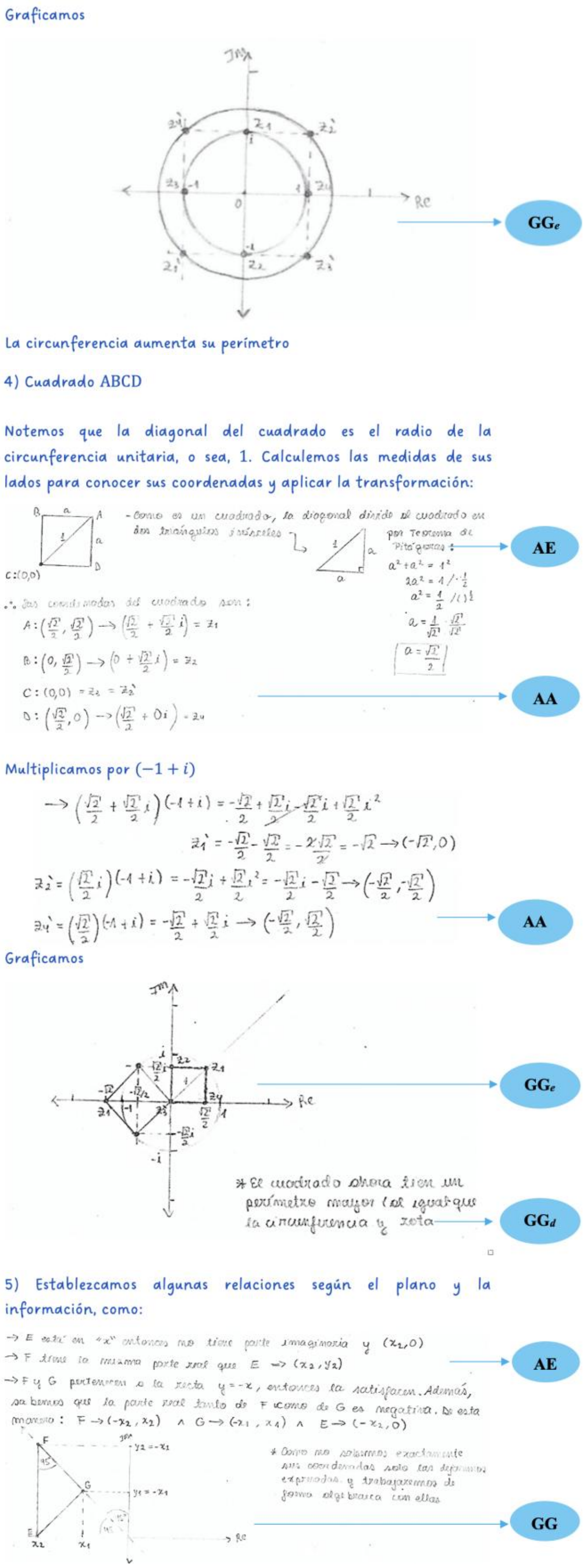


Figura 24: *Modos de Pensar y articuladores evidenciados en T2*

Análisis de respuestas a T3

La T3, tuvo los resultados más descendidos en la evaluación final, pues la mayoría respondió a la tarea de manera incompleta o con errores; además, cinco de los participantes la dejaron en blanco. Cabe destacar que esta tarea fue de alta demanda cognitiva, sobre todo el inciso b), pues se solicitaba dibujar tres figuras geométricas, un cuadrado, una circunferencia y un triángulo, al aplicarles la transformación $g(z) = z^2$; notemos que esta transformación cambia la forma y el tamaño de las figuras, cuestión con la que los participantes no están habituados a trabajar en el plano complejo. En general, los estudiantes que respondieron lograron situarse en un modo de pensar GG*e* y solo un informante respondió con éxito articulando los modos de pensar GG*e* y GG*d* con AA y AE. La Figura 25 muestra la respuesta de este participante al inciso a).





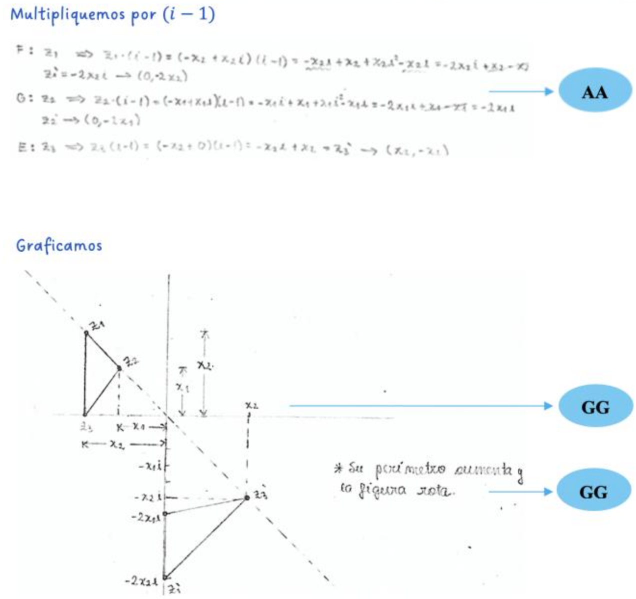
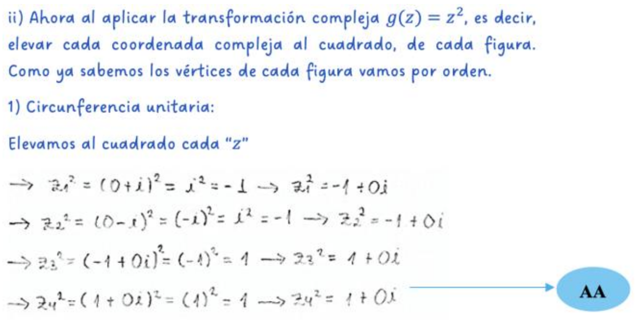


Figura 25: *Respuesta de P15 al inciso a) en T3*

Se observa que P15 transita desde el modo de pensar GG*e*, en que es situado el enunciado de la tarea, al modo de pensar AA para encontrar los números complejos que corresponden a los vértices de las figuras. Además, desde este modo de pensar aplicó la transformación $f(z) = (i-1)z$, multiplicando los números complejos que son vértices por $(i-1)$, para luego transitar a los modos GG*e* y GG*d* toda vez que muestra las figuras resultantes en el plano complejo (GG*e*) e indica que "la figura rota" (GG*d*). En este sentido, reconoce al final de su resolución un movimiento en el plano, la rotación, el que se logra gracias a la transformación compleja, que funciona como un articulador. También notamos manifestación de un modo de pensar AE de los números complejos al utilizar propiedades como el teorema de Pitágoras y cuando asocia características de los números complejos representados en los vértices del triángulo para obtener sus partes real e imaginaria. P15 también muestra una detallada resolución para el inciso ii), en el que logra responder correctamente, articulando nuevamente los cuatro modos de pensar. Se precisa este desarrollo en la Figura 26.



20 AÑOS
REIEC
NIECYT
UNICEN
REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

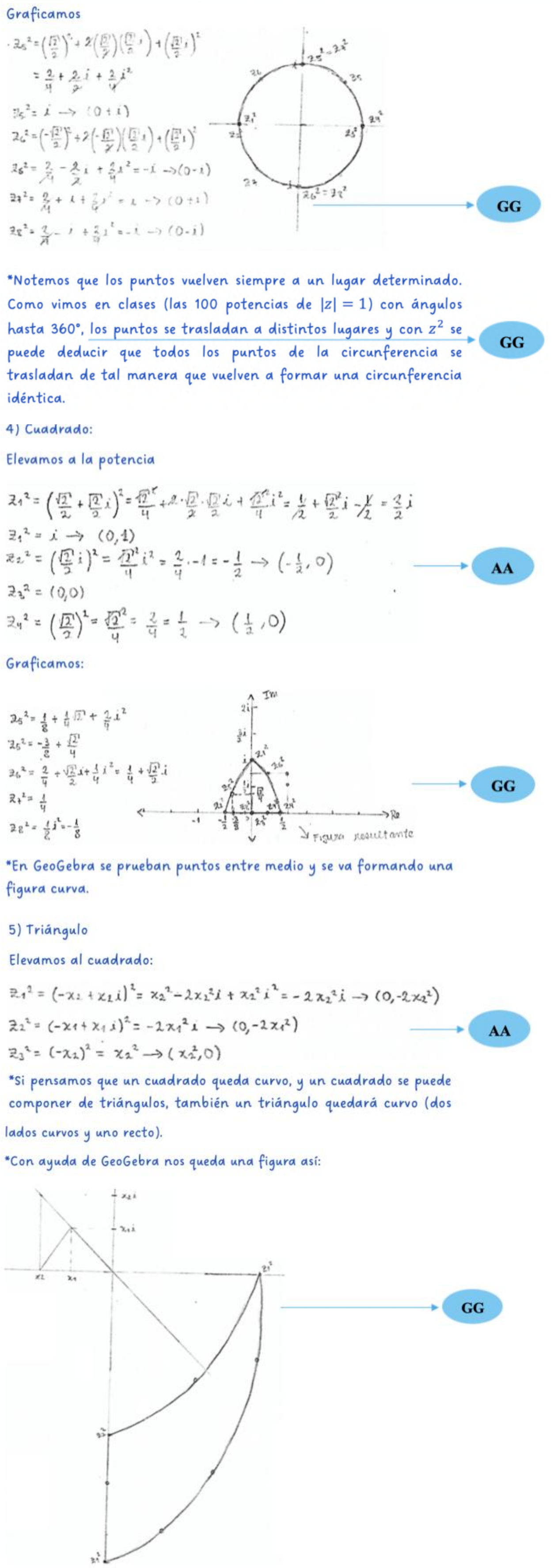


Figura 26: *Respuesta de P15 al inciso b) en T3*

Como se aprecia, P15 transita de un modo de pensar GG*e* a un modo de pensar AA para aplicar la transformación $f(z) = z^2$, lo cual lleva al informante a notar que, en el plano complejo (GG*e)* la circunferencia queda igual, pues "los puntos se trasladan a distintos lugares […] de tal manera que vuelven a formar una circunferencia idéntica". Interpretamos esto como una manifestación de un modo de pensar GG*d*, en tanto refiere a movimientos en el plano a través de expresiones como "trasladan" y "vuelven". Por otro lado, además de poner en interacción los tres modos de pensar (GG*e*, GG*d* y AA), P15 encuentra que, para el caso del triángulo y el cuadrado, las figuras resultantes ya no tendrán la misma forma. Esto es logrado tomando algunos números complejos adicionales que pertenecen a la figura y aplicándoles la transformación, lo que termina siendo dibujado en el plano, específicamente como triángulos con lados curvos. El informante señala que "en GeoGebra se prueban puntos entre medio y se va formando una figura curva". En las producciones de otros participantes, el software fue utilizado como una herramienta de apoyo para realizar la parte geométrica.

Los demás estudiantes, en su mayoría, responden correctamente el inciso i), pero no alcanzan el puntaje máximo porque en el inciso ii) no notan que las figuras cambian de forma. No obstante, en sus respuestas observamos nuevamente la articulación de los modos de pensar GG*e* AA y GG*d*. P3, por ejemplo, utiliza la forma trigonométrica de los números complejos, que lo lleva a simplificar cálculos aritméticos, pues utiliza propiedades relacionadas a las funciones seno y coseno. En lo específico, señala que multiplicar un número complejo por $i - 1$ será "multiplicar su módulo por $\sqrt{2}$ y sumarle $\frac{3\pi}{4}$ a su argumento". Esto lo interpretamos como manifestación de un modo de pensar GG*d*, pues en este modo los números complejos son entendidos con base en su módulo y argumento, cuya multiplicación está dada por la contracción, extensión y rotación, así como la multiplicación de magnitudes y la suma de argumentos. Si bien el informante no expresa directamente alguno de estos movimientos en el plano, sí refiere a la multiplicación de los módulos y la suma de los argumentos. En este caso evidenciamos que la función o variable compleja activa la articulación de los modos de pensar GG*e*, GG*d* y AA, desde su forma trigonométrica.

Por su parte, otros informantes utilizan la notación binomial desde el modo de pensar AA para hacer las multiplicaciones. Así lo vemos en la respuesta de P6, en la Figura 27, en la que se evidencia principalmente un modo de pensar GG*e* cuando el informante adjunta la figura resultante sin una explicitación en detalle de su procedimiento. Esto también sucedió con las producciones de otros participantes.

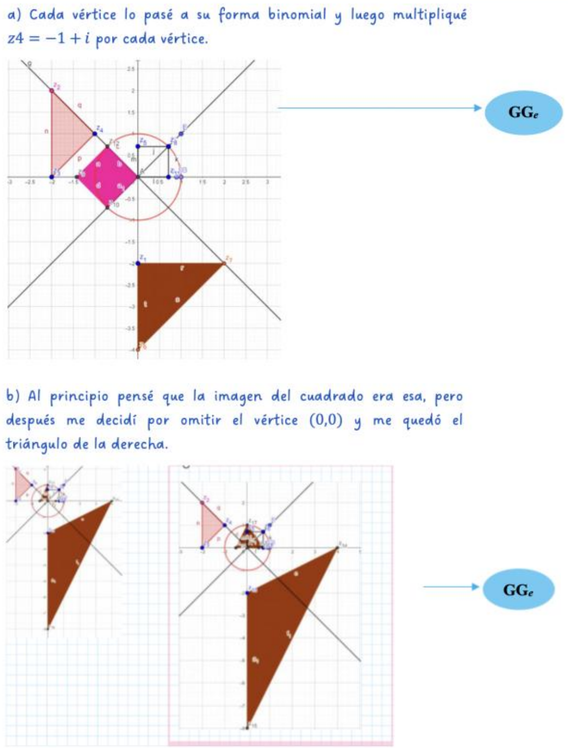
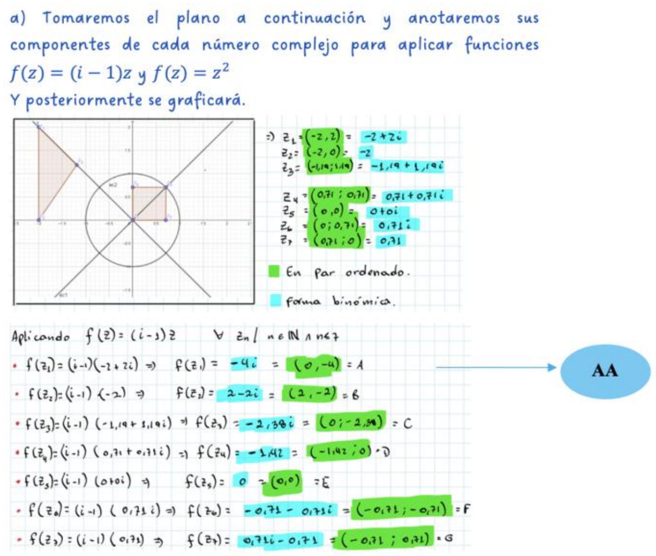


Figura 27: *Respuesta de P6 en T3*

La articulación más evidenciada fue AA y GG*e*, en la que los participantes multiplicaron números complejos, dependiendo de la transformación, y luego los representaron en el plano complejo. Un ejemplo de este desarrollo es el que muestra la Figura 28.



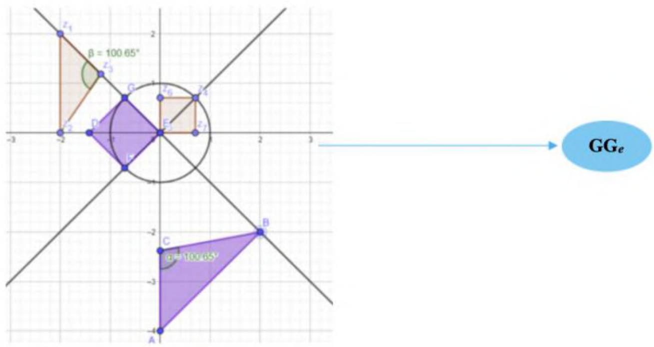


Figura 28: *Respuesta de P17 en T3*

Las respuestas de la minoría de los participantes estuvieron incorrectas en ambos incisos, adjuntando figuras que no correspondían con las respuestas esperadas. En el caso de P9, por ejemplo, se observa que este tuvo un problema al manipular las figuras en el software GeoGebra, ya que precisó que "al multiplicar por $(i-1)z$ me transformaba las figuras en rectas anti-diagonales, el polígono y la circunferencia con el cuadrado me aparecía un error y cuando elevé la circunferencia al cuadrado me dio una figura cóncava". Cabe recordar que en GeoGebra no tiene incorporadas directamente transformaciones complejas, por lo que es necesario introducir en varios casos la variable z para que se reconozca como número complejo y no como coordenada de R^2.

De esta manera desde los análisis de la T3 es posible concluir que los participantes pusieron en interacción los modos de pensar GG*e* y GG*d* de los números complejos con los modos de pensar AA y AE, a partir de las transformaciones complejas y la diferenciación entre el plano R x R y el plano complejo. No obstante, seis de los participantes no respondieron a esta tarea, tres lo hicieron de manera incorrecta, y otros siete de manera parcial, lo que muestra que el significado geométrico de los números complejos constituye un desafío dentro de la comprensión de este sistema numérico. Si bien la mayoría de los estudiantes resolvió correctamente el inciso i) en T3, al enfrentarse a $f(z) = z^2$ tuvieron dificultades relacionadas al asumir que la forma de las figuras se preservaba, como si fuese una transformación isométrica. Por otra parte, evidenciamos que R^2 se constituye como un elemento articulador e interferente para los modos de pensar GG*e* y GG*d* de los números complejos. Articulador, en cuanto a que los informantes muestran un dominio esperado sobre los elementos de un plano coordenado, que viene dado por sus experiencias previas con el plano cartesiano; pero también, interferente, en tanto los puntos del plano complejo no se distinguen como números, sino como vectores, lo que es extendido desde R^2 a los números complejos. La Figura 29 presenta lo evidenciado a través del análisis de T3.

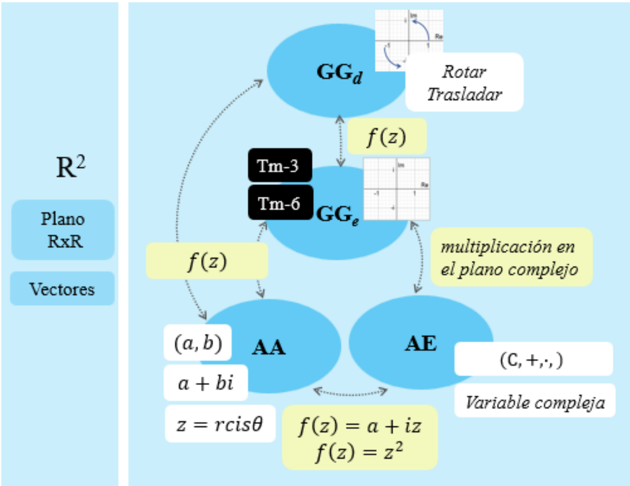


Figura 29: *Modos de Pensar y articuladores evidenciados en T3*

Los análisis presentados nos permiten describir la manera en que piensan los números complejos futuros profesores de matemáticas en la resolución de tareas que involucran distintos significados, operaciones, relaciones y propiedades de estos números; y pormenorizar interacciones e interferencias entre estos distintos modos de pensar. Los resultados indican que los participantes ven y entienden a los números complejos principalmente desde un modo de pensar AA, con base en la notación $a + bi$; en lo específico, estos evidencian proceder con claridad ante operaciones como suma y multiplicación de números complejos y al realizar cálculos en contextos de raíces cuadradas, módulos y funciones de variable compleja. Las partes real e imaginaria de los números complejos son utilizadas para articular el pensamiento entre los modos AA y GG*e*, toda vez que se plantea una correspondencia entre los ejes del plano y estas componentes. También la noción de módulo como "tamaño" de los números y la de transformación de figuras en el plano ($f(z)$) les permite transitar entre AA y GG*e*, al interpretar geométricamente estos conceptos en el plano complejo. Cabe señalar que cuando los estudiantes se sitúan en GG*e*, mostrando números en el plano complejo, lo hacen sin dificultades, utilizando su conocimiento sobre el plano cartesiano y los pares ordenados como apoyo. No obstante, en algunos casos, este mismo conocimiento se vuelve un elemento interferente cuando van más allá de la representación de los números a manipularlos en el plano, en el que se piensan como vectores y no como números (complejos). Otros elementos interferentes que tensionan el pensamiento en el modo AA, guardan relación con el concepto de raíz n-ésima y sus propiedades en los números reales, el que es extendido a las tareas de contexto complejo, en tanto se aplica, por ejemplo, la propiedad $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ inapropiadamente.

También los informantes articulan un modo de pensar AA y AE en las tareas presentadas. En lo específico, evidencian conocer propiedades y la estructura algebraica de cuerpo de los números complejos. Algunas relaciones o propiedades son evocadas desde articuladores como $a + 0i = a$ en la que reconocen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; la función raíz cuadrada, la que se define para cierto codominio; transformaciones como $f(z) = a + iz$ y desigualdades establecidas mediante el módulo, las partes real e imaginaria o el argumento de los números complejos, lo que lleva a un pensamiento estructural para situar elementos algebraicos, topológicos u ordenados del sistema numérico. Al mismo tiempo, en el caso de estudio, se manifiestan elementos interferentes del pensamiento estructural, como el diagrama de conjuntos, que transmite un significado de extensión de los sistemas numéricos y sus propiedades al ir añadiendo nuevas categorías de números, invisibilizando el isomorfismo $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$; también, el orden de los números reales se usa inapropiadamente para establecer desigualdades entre números complejos, extendiendo su dominio de validez. Aunque este hallazgo no fue generalizado, se destaca en tanto no era un error esperado, puesto que este grupo de informantes había profundizado en el curso virtual sobre la estructura ordenada de los números reales y complejos, caracterizándolas y distinguiéndolas.

Junto con las interacciones anteriores, el pensamiento manifestado por los informantes mostró también articulación entre los modos GG*e* y AE, mediante las tareas que consideraron las nociones de raíz cuadrada (T1), orden de los números complejos (T2) y transformaciones de figuras en el plano (T3). Los articuladores pesquisados guardan relación con pensar el codominio de la función raíz cuadrada en los números complejos, lo que lleva a restringir este considerando un semiplano del plano complejo; por otro lado, el concepto de módulo bajo el cual se establecen desigualdades entre números complejos, que lleva preguntarse desde un pensar geométrico (circunferencia centrada en el origen) cuán válida es esta estrategia para ordenar en general estos números; y las operaciones en el plano complejo, como la multiplicación, que diferencian conceptualmente el plano complejo del plano cartesiano.

Sobre el modo GG*d*, este solo se evidenció en T3. En particular, mediante la transformación compleja $f(z)$ situada en el plano complejo en que algunos estudiantes ven y entienden que operar números complejos en el plano para obtener nuevas figuras implica realizar movimientos tales como contracción, dilatación o rotación.

5. DISCUSIÓN

Como hemos precisado en el apartado anterior, este estudio da cuenta de una comprensión enfocada principalmente en un significado analítico de los números complejos y en menor medida en uno geométrico y estructural. Este hallazgo va en línea con lo reportado desde la literatura, en que es reconocido que estudiantes de secundaria y universitarios "no tienen construido un adecuado significado geométrico referido a los números complejos" (Distéfano et al. 2012, p.77), lo que junto a la abstracción y la naturaleza teórica de estos números constituyen un obstáculo en su comprensión (Nordlander y Nordlander, 2011). Sin embargo, nuestro estudio va más allá en este hallazgo, identificando con mayor fineza que el modo de pensar geométrico gráfico de los números complejos representa un desafío cognitivo más profundo, toda vez que la comprensión demanda no solo una visión geométrica estática de estos números (GG*e*), sino también una dinámica (GG*d*) ligada a movimientos en el plano, diferenciando este pensamiento en dos categorías. En lo específico, los participantes del curso virtual de números complejos, evidenciaron un desempeño descendido en las tareas que exigían un modo de pensar GG*d*, aun cuando este había sido abordado explícitamente en la instancia formativa. Esto nos lleva a conjeturar que el curso necesita del diseño de tareas más pertinentes respecto a un pensamiento GG*d*, que permitan un mejor desarrollo y puesta en acción, lo que necesitaría una indagación posterior.

Cabe señalar que si bien hay evidencia en la literatura consultada sobre el aspecto dinámico de los números complejos, esta no ha sido sistemática. Las investigaciones de Soto-Johnson et al. (2012) y Soto-Johnson y Troup (2014) han ido en esta dirección concluyendo que estudiantes universitarios y expertos matemáticos razonan sobre los números complejos no solo en términos de los modos de pensar de Sierpinska (2000), AA, SG y AE, sino también desde un 'modo sintético-geométrico-dinámico' relacionado con concepciones basadas en el movimiento. De hecho, Tabaghi y Sinclair (2013) en un estudio sobre la comprensión de conceptos en el AL, ya se referían a este modo de pensar en tanto la evidencia de su investigación indicó que este podría anticipar el desarrollo de formas estructurales del pensamiento (AE) en el Álgebra Lineal debido a que ambos modos de pensamiento se basan en propiedades de objetos y no en cálculos. En nuestra investigación, el modo GG*d* se sustenta, no solo desde datos empíricos sino primeramente desde la epistemología del sistema numérico, el que lo posiciona como una forma de pensar base para su comprensión.

También, este trabajo fue más allá en términos de describir la comprensión de los números complejos al validar articuladores para los modos de pensar situados en la formación inicial de profesores de matemáticas, obteniendo un modelo cognitivo para su comprensión. En este sentido, las tareas del caso de estudio fueron de gran utilidad para provocar en los futuros profesores la interacción de los modos de pensar los números complejos y el PP y PT. De esta manera, es clave seguir trabajando en el diseño de tareas con preguntas que promuevan un pensamiento reflexivo, sistémico y analítico. De acuerdo con Sierpinska (2016) la teoría nunca es una necesidad epistemológica, más bien es una necesidad cultural, similar a la necesidad de una persona de asistir a una exposición de arte, por ejemplo; por tanto, el PT en matemáticas rara vez, se desarrolla naturalmente sin que el estudiante haya encontrado ejemplos de tal pensamiento en su educación y se haya involucrado en él. De hecho, señala la autora, que cuando un sistema matemático teórico se desarrolla paulatinamente en un curso matemático desde cero, el profesor deja de estar en la posición de autoridad sobre los conocimientos que enseña, vale decir, los estudiantes están equipados para demostrar que el profesor está equivocado así como el profesor para demostrar que los estudiantes lo están (Sierpinska, 2016). En este sentido es crucial considerar la práctica del PT como un objetivo en los cursos de la formación inicial de profesores de matemáticas.

Particularmente, desde los datos que emergen de este estudio, parece necesario que los profesores en formación inicial tengan mayores oportunidades para profundizar en el sistema de los números complejos y los sistemas numéricos en general, considerando el relevante cambio de la naturaleza epistemológica del concepto de número y al que están ligados obstáculos epistemológicos. Un ejemplo concreto sobre esto ha sido el curso virtual de números complejos, el que llevamos a cabo de manera interuniversitaria y en codocencia (matemático y didacta de la matemática). Creemos que instancias como estas favorecen la preparación de los futuros profesores y tributan al llamado de su fortalecimiento (Pino-Fan et al., 2016).

Así, los resultados de ese estudio nos llevan a sugerir para la enseñanza de los números complejos que se tengan en cuenta los siguientes aspectos:

- Que lo Geométrico -estático y dinámico- de los números complejos interactúe con Analítico.
- Que lo Analítico de los números complejos interactúe con lo Estructural.
- Que lo Estructural de los números complejos interactúe con lo Geométrico -estático y dinámico.

Además, de recalcar que la enseñanza de estos números no sea restringida al ámbito de la operatoria de manera analítica, sino ofrecer a los estudiantes tareas en las que se tengan que atender distintos tipos de situaciones que involucren dos o más modos de pensar los números complejos.

6. CONCLUSIONES

El presente reporte de investigación tuvo como propósito describir los Modos de Pensar los números complejos que movilizan futuros profesores de matemática en el contexto de un curso virtual diseñado para favorecer el desarrollo de un pensar práctico y teórico de este sistema numérico. En consonancia con investigaciones previas que han documentado dificultades persistentes en la comprensión de los números complejos (Nordlander y Nordlander, 2011; Harel, 2013), los resultados obtenidos muestran que el curso constituyó una instancia formativa pertinente para profundizar la comprensión de este dominio matemático más allá de enfoques predominantemente procedimentales.

El análisis de las producciones de los participantes evidencia que las tareas propuestas favorecieron la movilización de diversos Modos de Pensar los números complejos —geométrico-gráficos y analítico-aritméticos y estructurales— así como la emergencia de articulaciones entre ellos. Este resultado es coherente con los planteamientos de la teoría de los Modos de Pensamiento (Sierpinska, 2000), que concibe la comprensión matemática como un proceso dinámico sustentado en la interacción de distintas formas de pensar un mismo objeto, y amplía su aplicación al dominio de los números complejos en contextos de formación inicial docente.

Desde esta perspectiva, los Modos de Pensar cumplen un doble rol en el marco del estudio. Por una parte, operan como una herramienta teórica para interpretar la comprensión de los números complejos, en línea con estudios que han utilizado este marco para analizar la construcción de significados en distintos dominios matemáticos. Por otra parte, los resultados del estudio muestran que estos modos constituyen un insumo didáctico relevante para el diseño de secuencias de aula, aportando criterios para la selección y articulación de tareas que favorezcan el tránsito entre distintas formas de pensamiento, tal como sugieren investigaciones recientes sobre el uso de tecnología y diseño didáctico en la enseñanza de los números complejos (Gaona y López, 2022; Seloane et al., 2023).

Un aspecto relevante del estudio es que el curso analizado se desarrolló como una instancia extracurricular y convocó a estudiantes de formación inicial docente provenientes de distintas regiones del país. Este resultado dialoga con investigaciones que destacan el potencial de los entornos virtuales y de las propuestas formativas flexibles para el desarrollo profesional docente (Oner, 2020; Schwarts et al., 2024), y permite anticipar la pertinencia de instancias curriculares o extracurriculares similares en la formación inicial de profesores de matemática.

Asimismo, los resultados muestran que el diseño de tareas sustentado en un enfoque histórico-epistemológico y cognitivo propició una comprensión más profunda de los números complejos, en línea con investigaciones que destacan la articulación de múltiples representaciones y enfoques como condición para el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos. En este sentido, la virtualidad operó como un medio que favoreció la explicitación de significados y la discusión matemática, más que como un fin en sí mismo, reforzando la importancia de una intencionalidad didáctica clara.

En el contexto del número especial conmemorativo de los 20 años de la Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, este estudio contribuye a la discusión sobre las innovaciones en la enseñanza de la matemática en el siglo XXI, aportando evidencia empírica sobre el potencial de articular entornos virtuales, diseño didáctico y marcos teóricos cognitivos para promover la comprensión profunda de los números complejos en la formación inicial docente.

Finalmente, se reconoce que este estudio presenta limitaciones propias de un diseño de estudio de caso, lo que abre líneas de investigación futura orientadas a analizar la implementación de este tipo de propuestas en contextos curriculares formales y a estudiar longitudinalmente su impacto en las prácticas de enseñanza de futuros profesores de matemática.

Declaración del uso de IA

La revisión de literatura se realizó a partir de bases de datos indexadas (Scopus, Web of Science, ERIC) y repositorios especializados en Educación Matemática. Adicionalmente, para apoyar la identificación de referencias bibliográficas actuales, se utilizó la herramienta *ChatGPT* (OpenAI, 2023) a través de la plataforma *Consensus*. Esta herramienta se empleó para localizar literatura reciente y no intervino en el análisis ni en la interpretación de los resultados de la investigación.

Agradecimientos

Este estudio ha sido financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID), por medio de la Beca CONICYT-PFCHA/Doctorado Nacional/ 2019-21191199. Y parcialmente financiado por el Proyecto DI REGULAR PUCV 2025, COD. PROYECTO: 039.717/2025.

7. REFERENCIAS

Açıkyıldız, G., & Kösa, T. (2021). Creating design principles of a learning environment for teaching vector spaces. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*. https://doi.org/10.16949/TURKBILMAT.860627

Akar, G. K., & Belin, M. (2024). Teachers' knowledge of different forms of complex numbers through quantitative reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*. https://doi.org/10.1080/10986065.2024.2378910

Akar, G. K., Saraç, M., & Belin, M. (2023). Exploring prospective teachers' development of the Cartesian form of complex numbers. *Mathematics Teacher Educator*. https://doi.org/10.5951/mte.2022.0034

Araya-González, M. (2019). Las cónicas en métricas no euclidianas: una mirada desde la teoría de los modos de pensamiento. *Transformación, 15*(2), 23–36. https://revistas.utm.edu.ec/index.php/transformacion/article/view/1910

Bagley, S., & Rabin, J. (2016). Students' use of computational thinking in linear algebra. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2*(1), 83–104. https://doi.org/10.1007/S40753-015-0022-X

Bagni, G. (2001). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental desempeñada en la educación media superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(1), 45-61.

Brownlee, J., Purdie, N., & Boulton-Lewis, G. (2001). Changing epistemological beliefs in pre-service teacher education students. *Teaching in Higher Education, 6*(2), 247–268. https://doi.org/10.1080/13562510120045221

Buehler, D. (2014). Incomplete understanding of complex numbers: A case study in the acquisition of mathematical concepts. *Synthese, 191*(17), 4231–4252. https://doi.org/10.1007/s11229-014-0527-x

Castelló, M., Pellegrino, V., Argente, D. A., Gómez-Marquez, J., Gaudenz, U., Randall, G., et al. (2020). *Real and virtual biological science living laboratory for science teachers' formation. EPiC Series in Education Science, 3*, 27–34. https://doi.org/10.29007/72c2

Chavez, E. G. (2014). *Teaching complex numbers in high school* [Master's thesis]. Louisiana State University. https://doi.org/10.31390/gradschool_theses.1828

Çelik, D. (2015). Investigating students' modes of thinking in linear algebra: The case of linear independence. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 2*(1), 81–86.

Creswell, J. (2012). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*. Sage publications.

Davis, J. P., Chandra, V., & Bellocchi, A. (2019). Integrated STEM in initial teacher education: Tackling diverse epistemologies. In *Advances in STEM Education* (pp. 23–44). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29489-2_2

Distéfano, M. L., Aznar, M. A., & Pochulu, M. D. (2012). Errores asociados a la representación geométrica-vectorial de números complejos: un análisis ontosemiótico. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 8*(30). https://www.union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/856

Dogan-Dunlap, H. (2010). Linear algebra students' modes of reasoning: Geometric representations. *Linear Algebra and Its Applications, 432*(8), 2141–2159. https://doi.org/10.1016/J.LAA.2009.08.037

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations*. Springer International Publishing.

Gaona, J., & López, P. (2022). Prospective mathematics teachers learning complex numbers using technology. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 55*(13), 2219–2248. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2133021

Galiakberova, A., Galyamova, E., & Kiselev, B. (2020). The basics of designing a digital simulation for the preparation of teachers of mathematics. *Vestnik of Minin University, 8*(4). https://doi.org/10.26795/2307-1281-2020-8-4-2

Güler, M., Kokoç, M., y Önder Bütüner, S. (2022). Does a flipped classroom model work in mathematics education? A meta-analysis. *Education and Information Technologies*,1-23. https://doi.org/10.1007/s10639-022-11143-z

Harel, G. (2013). DNR-based curricula: The case of complex numbers. *Journal of Humanistic Mathematics, 3*(2), 60–91. https://doi.org/10.5642/JHUMMATH.201302.03

Holmes, K. (2009). Planning to teach with digital tools: Introducing the interactive whiteboard to pre-service secondary mathematics teachers. *Australasian Journal of Educational Technology, 25*(3), 351–365. https://doi.org/10.14742/AJET.1139

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*, 235–261. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9

Lammassaari, M., Hietajärvi, L., & Salmela-Aro, K. (2021). Teachers' epistemic beliefs and reported practices in two cultural contexts. *Educational Studies, 50*(6), 781–805. https://doi.org/10.1080/03055698.2021.2000369

Mayring, P. (2015). Qualitative content analysis: Theoretical background and procedures. In A., Bikner-Ahsbahs, C., Knipping, N., Presmeg,(Eds). *Approaches to qualitative research in mathematics education*, 365-380. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_13

Nordlander, M., & Nordlander, E. (2012). On the concept image of complex numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43*(5), 627–641. https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.633629

Oner, D. (2020). A virtual internship for developing technological pedagogical content knowledge. *Australasian Journal of Educational Technology, 36*(1), 27–42. https://doi.org/10.14742/ajet.5192

OpenAI. (2023). *ChatGPT* (Mar 14 version) [Modelo de lenguaje]. Recuperado el 15 de diciembre de 2025 de https://chat.openai.com/

Pardo, T., & Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: Un estudio en el nivel universitario. *PNA, 2*(1), 3-15.

Parraguez, M., Randolph, V., & Campos, S. (2021). Más de una década investigando hechos didácticos desde la teoría modos de pensamiento: Hallazgos y avances. In *Tendencias en la Educación Matemática* (pp. 103-124). Comunicación Científica.

Parraguez, M., Randolph, V., Campos, S., & Pinto-Rojas, I. (2024). Adherencia y variedad a la teoría de los modos de pensamiento: una década de evolución de su metodología de investigación. En S. Estrella, M. Parraguez, R. Olfos (Eds.), *Aportes desde la didáctica de la matemática para investigar, innovar y mejorar en y sobre la práctica docente*. Editorial GRAÓ.

Patiño, A., Ramírez-Montoya, M. S., & Ibarra-Vázquez, G. (2023). Trends and research outcomes of technology-based interventions for complex thinking development in higher education: A review of scientific publications. *Contemporary Educational Technology, 15*(1), 1–21. https://doi.org/10.30935/cedtech/13416

Pereira, F. (2019). Teacher education, teachers' work, and justice in education: Third space and mediation epistemology. *Australian Journal of Teacher Education*, *44*(3), 73–86. https://doi.org/10.14221/AJTE.2018V44N3.5

Pino-Fan, L. R., Guzmán-Retamal, I., Larraín, M., & Vargas-Díaz, C. (2018). La formación inicial de profesores en Chile: 'Voces' de la comunidad chilena de investigación en educación matemática. *Uniciencia*, *32*(1), 68-88.

Randolph, V., & Parraguez, M. (2019). Comprensión profunda del Sistema de los Números Complejos: Un estudio de caso a nivel escolar y universitario. *Formación Universitaria*, *12*(6), 57-82. https://doi.org/10.4067/S0718-50062019000600057

Schwarts, G., Herbst, P., & Brown, A. (2024). Harnessing asynchronous digital simulations of problem-based lessons to support mathematics teachers' professional development: A design-based approach. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-024-10514-x

Seloane, P. M., Ramaila, S., & Ndlovu, M. (2023). Developing undergraduate engineering mathematics students' conceptual and procedural knowledge of complex numbers using GeoGebra. *Pythagoras*, *44*(1), Article a763. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v44i1.763

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' thinking in Linear Algebra. In J.L. Dorier (Ed.), The Teaching of Linear Algebra in Question (pp. 209-246). Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A. (2004a, July 4-11). Theory is not necessary. Practice of theory is. On the necessity of practical understanding of theory [Paper Presentation]. *ICME-10 Topic Study Group 22*, Copenhagen.

Sierpinska, A. (2004b). Research in mathematics education through a keyhole: Task problematization. *For the Learning of Mathematics*, *24*(2), 7-15.

Sierpinska, A. (2005). On Practical and Theoretical Thinking and other False Dichotomies in Mathematics Education. En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard and F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education*, (pp. 117-135). http://doi.org/10.1007/0-387-24270-8_11

Sierpinska, A. (2016). Inquiry-based learning approaches and the development of theoretical thinking in the mathematics education of future elementary school teachers. In B., Maj-Tatsis, M. Pytlak, E. Swoboda (Eds.), *Inquiry-based mathematical education*, pp. 23-57.

Sierpinska, A., Nnadozie, A. & Oktaç, A. (2002). *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra*. Concordia University.

Şimşek, M. C., & Turanlı, N. (2024). Pre-service mathematics teachers' modes of thinking in linear algebra: The case of linear transformation. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, *54*(1), 95–118. https://doi.org/10.53444/deubefd.1481905

Soto-Johnson, H., Oehrtman, M., Noblet, K., Robertson, L., & Rozner, S. (2012). Experts' reification of complex variables concepts: The role of metaphor. In (Eds.) S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, and M. Oehrtman, *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 443-447.

Soto-Johnson, H., & Troup, J. (2014). Reasoning on the complex plane via inscriptions and gesture. *The Journal of Mathematical Behavior*, *36*, 109-125.

Stake, R. (2010). *Investigación con Estudio de Casos*. Morata.

Tabaghi, S., & Sinclair, N. (2013). Using dynamic geometry software to explore eigenvectors: The emergence of dynamic-synthetic-geometric thinking. *Technology, Knowledge and Learning*, *18*, 149-164.

Vygotsky, L. S. (1995). *Pensamiento y lenguaje. Cognición y desarrollo humano*. Paidós.

Yin, R. K. (2014). *Case study research: Design and methods*. Sage publication.

Yoon, S. A., Chinn, C., Noushad, N. F., Richman, T., Hussain-Abidi, H., Hunkar, K., et al. (2023). Seven design principles for teaching complex socioscientific issues. *Frontiers in Education*, *8*, Article 1210153. https://doi.org/10.3389/feduc.2023.1210153.