REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Número especial - 20 Años REIEC

Material potencialmente significativo para o ensino de função de proporcionalidade

José Roberto da Silva[1], Marco Antonio Moreira[2]

jroberto.silva@upe.br , moreira@if.ufrgs.br

[1]*UPE, Universidade de Pernambuco, Campus Mata Norte, Rua Profº. Amaro Maltez, Centro, 201, Nazaré da Mata – PE, Brasil.*
[2]*Professor Emérito da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.*

Resumo

Esta pesquisa que relata a elaboração e uso de um *texto de apoio* para o ensino de Função de Proporcionalidade foi vivenciada por 32 alunos que são professores do Ensino Fundamental e Médio da rede pública estadual em um curso de especialização em ensino de matemática. O corpus utilizado abarca estudos sobre a Álgebra em termos didático-epistemológico/pedagógico, também se apoia nas teorias da Aprendizagem Significativa, dos Campos Conceituais e da Atividade, instituindo as chamadas Atividades Didáticas Ausubel, Vergnaud e Leontiev – ADAVL (Silva, 2009). A investigação, que teve colaboração de um professor especialista em ensino de matemática, foi realizada na disciplina Didática da Matemática e trata-se de uma pesquisa qualitativa, um estudo de caso educativo do tipo investigação-ação. A análise das respostas às atividades, aos questionários e dos mapas conceituais revelou mudanças relevantes na ressignificação do sistema conceitual dos elaboradores do texto de apoio e dos alunos sobre funções afim, linear e de proporcionalidade. Logo, no marco ausubeliano, este texto de apoio corresponde a um *material potencialmente significativo*.

Palavras clave: Aprendizagem significativa, Material potencialmente significativo, Função de proporcionalidade.

Material potencialmente significativo para la enseñanza de la función de proporcionalidad

Resumen

Esta investigación, que relata la elaboración y el uso de un texto de apoyo para la enseñanza de la Función de Proporcionalidad, fue vivenciada por 32 estudiantes que son docentes de Educación Primaria y Secundaria de la red pública estatal, en un curso de especialización en enseñanza de las matemáticas. El corpus utilizado abarca estudios sobre el Álgebra desde una perspectiva didáctico-epistemológica/pedagógica y también se apoya en las teorías del Aprendizaje Significativo, de los Campos Conceptuales y de la Actividad, instituyendo las denominadas Actividades Didácticas de Ausubel, Vergnaud y Leontiev – ADAVL (Silva, 2009). La investigación, que contó con la colaboración de un profesor especialista en enseñanza de las matemáticas, se llevó a cabo en la asignatura Didáctica de las Matemáticas y se trata de una investigación cualitativa, un estudio de caso educativo del tipo investigación-acción. El análisis de las respuestas a las actividades, a los cuestionarios y de los mapas conceptuales reveló cambios relevantes en la resignificación del sistema conceptual de los elaboradores del texto de apoyo y de los estudiantes sobre las funciones afín, lineal y de proporcionalidad. Por lo tanto, en el marco ausubeliano, este texto de apoyo corresponde a un material potencialmente significativo.

Palabras clave: Aprendizaje significativo, Material potencialmente significativo, Función de proporcionalidad.

Potentially meaningful material for teaching proportionality functions

Abstract

This research reports on the development and use of a support text for teaching proportionality functions. The study involved 32 participants who are elementary and secondary school teachers from the state public education system, enrolled in a specialization course in mathematics education. The corpus of the study includes research on Algebra from a didactic-epistemological and pedagogical perspective and is also grounded in the theories of Meaningful Learning, Conceptual Fields, and Activity Theory, establishing the so-called Ausubel, Vergnaud, and Leontiev Didactic Activities (ADAVL) (Silva, 2009).The investigation, which had the collaboration of a professor specializing in mathematics education, was carried out within the course *Didactics of Mathematics*. It is a qualitative study, characterized as an educational case study of the action-research type. The analysis of responses to the activities, questionnaires, and concept maps revealed significant changes in the re-signification of the conceptual system of both the authors of the support text and the students regarding affine, linear, and proportionality functions. Therefore, within the Ausubelian framework, this support text constitutes a potentially meaningful material.

Keywords: Meaningful learning; Potentially meaningful material; Proportionality function.

Matériel potentiellement significatif pour l'enseignement de la fonction de proportionnalité

Résumé

Cette recherche, qui présente l'élaboration et l'utilisation d'un texte de soutien pour l'enseignement de la fonction de proportionnalité, a été menée auprès de 32 élèves qui sont enseignants de l'enseignement fondamental et secondaire du réseau public de l'État, dans le cadre d'un cours de spécialisation en enseignement des mathématiques. Le corpus utilisé comprend des études sur l'algèbre du point de vue didactique-épistémologique et pédagogique, et s'appuie également sur les théories de l'Apprentissage Significatif, des Champs Conceptuels et de l'Activité, instituant ce que l'on appelle les Activités Didactiques d'Ausubel, Vergnaud et Leontiev – ADAVL (Silva, 2009). La recherche, réalisée avec la collaboration d'un enseignant spécialiste de l'enseignement des mathématiques, s'est déroulée dans le cadre du cours de Didactique des Mathématiques. Il s'agit d'une recherche qualitative, d'une étude de cas éducative de type recherche-action. L'analyse des réponses aux activités, aux questionnaires et des cartes conceptuelles a révélé des changements significatifs dans la re-signification du système conceptuel des concepteurs du texte de soutien et des élèves concernant les fonctions affine, linéaire et de proportionnalité. Ainsi, dans le cadre ausubélien, ce texte de soutien correspond à un matériel potentiellement significatif.

Mots clés: Apprentissage significatif, Matériel potentiellement significatif, Fonction de proportionnalité.

1. INTRODUÇÃO

Na história da humanidade, com as contribuições dos gregos[1], desde a criação das bases da educação formal na Idade Média até os dias atuais, há uma diversidade de momentos e formas que permitem reconhecer o intuito da escola, promover a difusão do conhecimento. Nas bases iniciais da escola, essa intencionalidade pode ser percebida por meio da seguinte afirmação de Petitat (1994, p. 49): "[...] a civilização medieval é basicamente uma civilização da palavra e dos sentidos, em que a transmissão dos conhecimentos e das tecnologias prescinde das instituições especializadas e de textos escritos."

As investidas para melhorar ao máximo a qualidade de difusão do conhecimento científico nas escolas passaram a ser um dos fundamentos primordiais a serem almejadas no ato educativo. Essas ações, neste estudo, vão ser abordadas sob a ótica de duas contribuições relevantes, uma de ordem didático-epistemológica e a outra de cunho didático-metodológico. A primeira, conforme a ordem apresentada começa no século XX, com o surgimento dos estudos de cognição trazidos pelo Suíço Jean William Fritz Piaget (1896-1980) e de seu contemporâneo, não menos ilustre, o Bielorrusso Lev Semyonovich Vygotsky (1896-1934), ambos ocasionaram um grande impacto na educação com suas visões teóricas sobre o desenvolvimento cognitivo.

Vale ressaltar que neste estudo o referencial teórico adotado foi o do Norte Americano David Paul Ausubel (1918-2008) que, em oposição à aprendizagem mecânica alinhada aos behavioristas, propõe a aprendizagem significativa no marco cognitivista construtivista. Além disso, na investigação, recorre-se também a alguns aspectos da Teoria dos Campos Conceituais - TCC (Vergnaud, 1990) e da Teoria da Atividade Humana - TA (Leontiev, 1978). Grande parte desses estudos, a partir dos anos oitenta, explorou certas atividades e/ou recursos para lidar com a árdua tarefa da conceitualização em ensino de ciências e matemáticas.

O propósito de analisar o potencial didático quanto à elaboração e ao uso de atividades pedagógicas, na perspectiva de que o seu enfoque teórico, específico do conhecimento de ciências e de matemática, esteja pautado epistemológico e pedagogicamente levou a criação das Atividades Didáticas: Ausubel, Vergnaud y Leontiev – ADAVL (Silva, 2009). As ADAVL's articulam preceitos da TCC, da TA e, em termos pedagógicos, estão aportadas na Teoria da Aprendizagem Significativa – TAS de Ausubel (1963/1980/2002). Este artigo aborda se a elaboração e uso de um Texto de Apoio para o ensino de funções afins, linear

[1] Foram os primeiros filósofos da natureza que formaram ideias e criaram interpretações que podiam manter-se por si mesmas, sem invocar qualquer deus para apoiar fraquezas ou obscurantistas em suas explanações (COLIN, 2001, p. 64).

e de proporcionalidade materializando uma ADAVL, pode ser qualificado como um *Material Potencialmente Significativo*.

Porém, essa condição, apesar de necessária, pode não ser suficientes, pois há uma diversidade de empecilhos que podem desvirtuar a direção do caminho planificado como pode ser observado em seguida nas considerações apresentadas por Silva (2009, p. 20):

> Cabe resaltar que las investigaciones centradas en la Didáctica de las Ciencias, y, en particular, en la Didáctica de las Matemáticas, no deben restringirse a las contextualizaciones y al uso de recursos en sí, sino que deben ir más allá de las observaciones y de los análisis de los registros cotidianos de las aulas, toda vez que uno de los objetivos más importantes consiste en crear las condiciones que permitan al alumno la adquisición del saber; de donde se deduce la necesidad de que el profesor posea un amplio dominio de las actividades propuestas. Ello exige del docente cualidades que, para ser adquiridas, van más allá de una simple participación en la elaboración de sus actividades pedagógicas. Para alcanzar tales habilidades que le permitan analizarlas y/o crearlas, se necesita llevar a cabo un tipo de "esfuerzo epistemológico".

A utilização do já referido Texto de Apoio, certamente, não deve remeter a um reducionismo simplista de que a exploração cuidadosa de aspectos didático-epistemológicos resolve os problemas do ensino, pois isso de certa forma reforçaria um empirismo exacerbado com muitas críticas na literatura. E, sim, disponibilizar mais uma opção para que os professores possam planificar atividades que viabilizem uma *aprendizagem significativa ausubeliana*, procurando combater o que Moreira (2011) chama atenção, ao destacar o fato de que boa parte das instituições de ensino ainda investe em uma forma de aprendizagem mecânica.

Neste contexto, pressupõe-se que a natureza e as condições de existência de uma aprendizagem significativa ativa baseada na recepção requerem um ensino expositivo que admita os princípios da *diferenciação progressiva* e da *reconciliação integradora* nos materiais de instruções, pois "[...] caracterizan asimismo el aprendizaje, la retención del contenido de la materia en la estructura cognitiva del estudiante." (Ausubel, 2002, p. 32): Em acréscimo,

> El primer principio reconoce que la mayoría del aprendizaje y toda la retención y la organización de la materia es de naturaleza jerárquica, yendo de arriba hacia abajo en función del nivel de abstracción, generalidad e inclusividad. La conciliación integradora se facilita en la enseñanza expositiva si el enseñante y/o los materiales de instrucción prevén y neutralizan explícitamente las similitudes y las diferencias confundibles entre las ideas nuevas y las pertinentes y establecidas ya existentes que están presentes en las estructuras cognitivas de los alumnos. (Ausubel, 2002, p. 32-33).

No âmbito da TCC do Vergnaud, em termos de intentos das ADVL's, vale apenas ressaltar o interesse na conceitualização de algo de valor expressivo na TCC. Assim, ao tratar de uma determinada área de conhecimento, como no caso da matemática, conforme Vergnaud (2003) citado por Silva (2009, p. 45):

> Un abordaje psicológico y didáctico de la formación de los conceptos matemáticos nos lleva a considerar un concepto como un conjunto de invariantes utilizables en la acción. La definición pragmática de un concepto recurre, por lo tanto, al conjunto de las situaciones que constituyen la referencia de sus diversas propiedades, y al conjunto de los esquemas utilizados por los sujetos en tales situaciones.

No caso da TA de Leontiev (1978), o aspecto relevante a ser trazido neste artigo envolve o enfoque sobre o significado e o sentido destacado por Duarte (2005) citado por Silva (2009, p. 55):

> Haciendo uso de los términos de Leontiev, al contenido del acto, esto es, a aquello que constituye su objeto, se vincula el *significado del acto*, es decir, el significado del acto es lo que el sujeto hace, es la respuesta a la pregunta: ¿qué es lo que está haciendo el individuo? Pero, la conciencia humana, según Leontiev, trabaja con las relaciones entre significado y sentido del acto. ¿Cuál sería el sentido del acto? Para Leontiev, el sentido del acto es dado por aquello que une, en la conciencia del sujeto, el objeto de su acto (su contenido) al motivo del mismo (Duarte apud Silva 2009, p. 55).

Em acréscimo, ainda segundo Duarte (2005) citado por Silva (2009, p. 73):

> En el desarrollo del psiquismo, Leontiev amplía esta concepción de Vygotsky, estableciendo una relación entre la estructura de la actividad humana y la estructura de la conciencia humana. Así, la unidad inicial de análisis pasa a ser la de la relación entre el motivo de la acción y su contenido (o su objetivo). Esta relación entre el motivo y el contenido de la acción se refleja en la estructura de la conciencia como relación entre el significado y el sentido. […].

Em relação às contribuições de ordem tecnológicas, estas ocorrem na segunda metade do século XX a partir dos anos sessenta. Neste período, entre outros aspectos, podem ser destacados dois fatos que viabilizaram o uso do computador na educação, a saber: o advento da microinformática que gerou reduções no custo dos computadores e o surgimento da linguagem *Basic* nos Estados Unidos da América, criada pelos professores John G. Kemeny e T. Kurtz, mais precisamente em 1963 no Durtmouth College com finalidades didáticas. Em síntese, visava tornar mais fácil a elaboração de programas educativos (softwares educativos).

Valente (1999), diante de seus estudos no âmbito das novas tecnologias, ressalta que o computador auxilia o aprendiz no processo de construção do seu conhecimento e, além disso, reforça acrescentando que outros recursos adequados e propósitos educativos bem estruturados auxiliam o fortalecimento didático para a aquisição de conceitos matemáticos. Cabe a ressalva de que nada deve ser visto como a solução em definitivo de um problema, em particular, se este diz respeito à educação, no caso do uso de tecnologia. Como lembra Prado (2005), apesar das contribuições tecnológicas atuais serem expressivas, suas recursividades precisam ser devidamente compreendidas quanto as suas implicações em termos de processo de ensino e aprendizagem.

Rachelli, Denardi e Bulegon (2016) realizaram uma pesquisa bibliográfica no Portal de Periódicos da CAPES e em revistas científicas da área de Ensino de Ciências e Matemática sobre o uso das tecnologias computacionais no ensino de Cálculo visando identificar os principais *softwares*, as ferramentas utilizadas, os conteúdos matemáticos trabalhados e os resultados obtidos nestas pesquisas. Eles desvelam que o *software* mais utilizado nos trabalhos analisados foi o *GeoGebra*, a ferramenta mais explorada envolvia a construção de gráficos de funções. Neste caso, o conteúdo matemático de cálculo centrava-se mais no estudo das derivadas. Por outro lado, a pesquisa de García, Gavilán e Llinares (2012) foi a única a fazer uso do *Cabri*-Géomètre (Cabri), em que as situações de sala de aula favoreceram a aprendizagem dos estudantes sobre o ensino de derivadas.

O Cabri está sendo referenciado por atender aos interesses deste estudo. Este *Software* foi desenvolvido por Baulac, Bellemain e Laborde (1988), no Laboratório de Estruturas Discretas e de Didática da Universidade de Grenoble na França. Além de possibilitar a construção de figuras da geometria clássica que possam ser construídas com o uso da régua e do compasso, o *software* permite que estas construções sejam movimentadas sem que haja perda das suas propriedades características constituindo-se em um recurso didático que fomenta a experimentação. Isto auxilia tanto o ensino como a aprendizagem matemática, conforme Henriques (2000, p. 62):

> [...] Bellemain (1992), sustenta que uma das principais preocupações quando da elaboração do Cabri-Géomètre, foi a de permitir aos alunos visualizarem na tela do computador diferentes desenhos correspondendo a mesma descrição, isto é, pertencentes a mesma configuração ou classe. O que possibilita aos estudantes explorarem propriedades duma configuração geométrica, utilizando este software (Henriques, 2000, p. 62).

Há muitos fatores a serem levados em consideração por parte dos que pretendem fazer uso de tecnologias na educação. Gomes (2008), por exemplo, reporta-se a Hinostroza e Mellar (2001) para chamar a atenção para o fato de que na literatura existem críticas sobre a qualidade almejada das tecnologias, por não atenderem em plenitude as expectativas de seus usuários. Para exemplificar isto, os autores enfatizam a insatisfação com os impactos epistemológicos segundo os estudos de Shneiderman e Plaisant (2005), Balacheff e Kaput (1996) e Gravemeijer (1997). No entanto, Gomes (2008) alerta aos interessados em criar interfaces educativas que carecem de ter seus *designs* orientados por processos de aprendizagem de conceitos, lembrando da existência de poucas teorias que tratem da interação humano-computador, abordando a aprendizagem de conceitos específicos como os estudos de Barnard, May, Duke e Duce (2000) e de Szendrei (1996).

Esta pesquisa teve como objetivo investigar, no âmbito das ADAVL, a elaboração e o uso de um texto de apoio para o ensino de função afim, função linear e função de probabilidade, adotando como recurso didático o *software* Cabri. Entre os achados, auxiliou-se os alunos a ressignificarem as suas compreensões sobre as idealizações matemáticas, permitindo qualificar o texto de apoio como um *material potencialmente significativo.* Quanto ao professor que colaborou com a realização desta pesquisa, o trabalho contribuiu para a ressignificação do seu sistema de informação sobre o conteúdo abordado.

2. CONCEPÇÕES ALGÉBRICAS: DISTINTOS ATRIBUTOS DO USO DE VARIÁVEIS

Na elaboração de procedimentos para lidar com o conhecimento formal, o professor carece de estar seguro sobre as ideias subjacentes ao que ele pretende ensinar e a respeito do que pode influenciar no propósito educativo em questão. Outro fator relevante a ser considerado compreende a identificação do que o aluno já conhece acerca do que se pretende ensinar. Essas duas condições evidenciadas por Ausubel (2002), para Silva (2009), são essenciais para definir a organização dos intentos educativos, visando uma boa aprendizagem.

A síntese histórica, a partir de Lins e Gimenez (1997), acerca das atividades matemáticas algébricas serve para aludir aos propósitos deste estudo. A álgebra inicia-se com os babilônios e egípcios (cerca de 1700 a.C.) com a obtenção de regras para resolver problemas, sem que houvesse uso de notações para representar as já citadas regras de forma geral. Mas, por volta de 250 a.C., o grego Diofanto cria um sinal especial para representar a incógnita numa dada equação. O francês Viète (1540-1603), por sua vez, introduziu o cálculo com letras e com regras próprias representando quantidades ou grandezas geométricas. A gênese da notação de estrutura algébrica surge primeiramente de forma implícita com Galois (1811-1832) e Abel (1802-1829) e, por fim, Bourbaki (a partir de 1940) apresenta as bases de um mundo algébrico, completamente "abstrato".

A escolha de uma situação que envolva a ideia de função, em particular, precisa levar em consideração as ideias básicas do campo algébrico, como incógnitas, variáveis, variações, variações entre duas ou mais variáveis, relação entre variáveis etc. O conceito de variável é fundamental para a compreensão do conceito de função. As mencionadas variações se relacionam segundo a estrutura de uma equação (lei de formação), que faz o papel de identificar o tipo de relação existente entre as variáveis envolvidas.

Usiskin (1995) apresenta uma categorização de quatro tipos de concepções sobre a álgebra da escola média, são elas: 1º. *A álgebra como aritmética generalizada*; 2º. *A álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos problemas*; 3º. *A álgebra como estudo de relações entre grandezas*; e, por fim, 4º. *A álgebra como estudo das estruturas*. Estas considerações contemplam os propósitos educativos deste estudo, conforme o que foi caracterizado até então, por isso será apresentada em seguida uma visão panorâmica sobre cada uma destas quatro concepções.

Tipo 1: consiste em descrever matematicamente relações entre números, exemplo: $(-1) \cdot 2 = -2$; $(-1) \cdot 3 = -3$; logo, permite generalizações, como expressar que $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. Portanto, as instruções são *traduzir* e *generalizar*;

Tipo 2: neste caso, as variáveis podem ser tanto incógnitas como constantes e tem como instrução *simplificar* e *resolver*. Exemplo: dada à expressão $|x - 1| = 4$ a resposta será $x = 5$ ou $x = -3$, pois, $x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5$ ou $x - 1 = -4 \Rightarrow x = -3$. Outra maneira de resolver será usar a definição de módulo, ou seja, fazer $(x - 1)^2 = 4^2$, pois as sentenças são equivalentes;

Tipo 3: se distingue dos dois anteriores, pois, ao invés de ocupar-se de descrever relações matemáticas entre números, procurando traduzir e generalizar, ou das variáveis enquanto incógnitas e/ou variáveis procurando simplificar e resolver problemas, centra-se nas fórmulas. Segundo Usiskin (1995, p. 15), "[...] a concepção de álgebra como estudo das relações pode começar com fórmulas [...]". Ademais, o tipo 3 distingue-se da concepção tipo 2, porque as variáveis variam, porém, isso não pode ser entendido como uma redundância.

Tipo 4: Este tipo envolve o estudo dos grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais, é caracterizado por Usiskin (1995, p. 16): "[...] pelas propriedades atribuídas às operações com números reais e polinômios". As variáveis divergem dos três tipos anteriores, pois não se trata de uma função ou relação nem de algum tipo de argumento. Não existe equação a ser resolvida onde a variável apareça como incógnita, nem há também modelo aritmético que possa ser generalizado. A variável vai além de um símbolo arbitrário, como na expressão: $3x^2 + 4ax - 132a^2$, que tem como fatoração: $(3x + 22a)(x - 6a)$.

Essas concepções carecem de respaldo histórico não apenas em termos de alusão inicial, mas também em conformidade com o próprio Usiskin (1995), por aconselhar trazer essas quatro concepções da álgebra no âmbito da história da matemática. Porém, há cuidados que devem ser tomados a fim de evitar a quebra do encadeamento lógico e sequencial na apresentação dessas concepções algébricas, tendo em vista que não se trata de algo feito ao acaso. Para ilustrar este argumento basta atentar para a seguinte contextualização trazida de Ríbnikov (1991):

Os babilônios antigos foram os povos que viveram na Mesopotâmia no período de 2000 até 200 a.C. na região situada entre os rios Tigres e Eufrates. Atualmente, é a região que corresponde ao Iraque, juntamente com parte da Síria, do Líbano e de Israel. As suas contribuições para o desenvolvimento das Ciências e Matemáticas, além de diversificadas foram muitas e, neste contexto, quanto à matemática, boa parte está localizada em centenas de tabletas de barro (tablillas), encontradas em Uruk e estimadas com aproximadamente 5000 anos de existência. Reportando-se a parte destes materiais Ríbnikov (1991, p. 29) destaca que

> El contenido de las tablillas muestra que sobre la base de este sistema fueron creadas muchas reglas uniformes de las operaciones aritméticas, tanto con números enteros como con fracciones. Para facilitar las operaciones existían tablas de multiplicación (desde 1×1 até 60×60). Para la multiplicación de números grandes con ayuda de las tablas de multiplicar se hallaban los productos parciales, los cuales después se sumaban. La división se realizaba con ayuda de las tablas de los valores inversos (ya que $b \div a = b \times \frac{1}{a}$) (Ríbnikov ,1991, p. 29).

Diante da construção e da utilização de tabelas de quadrados e/ou cubos de números inteiros, inversas como raízes quadradas, dentre outras, a partir da observação de certas regularidades, alguns objetos aritméticos ficam mais evidentes, por exemplo, a identificação de propriedades aritméticas. Desse modo, a demarcação da primeira concepção algébrica de Usiskin traduz-se como algo decorrente da necessidade de *traduzir* e *generalizar*.

Há outro episódio a ser destacado, também levando em consideração as já mencionadas tabletas babilônicas, trata-se da existência de "[...] textos dedicados a la solución de problemas los cuales desde El punto de vista moderno se reducen a ecuaciones de primero y segundo grado e incluso de tercero" (Ríbnikov, 1991, p. 29). É neste recorte que, literalmente, aparecem extratos que aludem a segunda concepção de Usiskin. Além disso, Waerden (1903) *apud* Ríbnikov (1991, p. 29):

> […] clasificó todos los métodos de solución de los problemas en las tablillas babilonias. Llegó a La conclusión de que estos métodos eran equivalentes a los métodos de solución de los siguientes diez tipos de ecuaciones y sus sistemas:
>
> *a) ecuaciones con una incógnita:* $ax = b; x^2 = a; x^2 \pm ax = b; x^3 = a; x^2(x + 1) = a$.
>
> *b) sistemas de ecuaciones con dos incógnitas:* $x \pm y = a; xy = b; x \pm y = a; \ x^2 + y^2 = b$. (Waerden. 1903 *apud* Ríbnikov, 1991, p. 29).

Ainda acerca das tabletas, no âmbito geométrico, aparecem registros sobre a enumeração de triângulos retângulos com lados racionais, geralmente denominados de tríades de números pitagóricos, cuja representação comum é do tipo: $x^2 + y^2 = z^2$. Além dessas informações possibilitarem uma visão panorâmica da álgebra, enquanto área de conhecimento matemático, obtidas a partir de Ríbnikov (1991), também ajudam a evidenciar duas considerações importantes relacionadas à terceira concepção de Usiskin.

Quanto às ternas pitagóricas, "La reconstrucción del método de su elección conduce, aparentemente, a las fórmulas: $x = p^2 - q^2; y = 2pq; z = p^2 + q^2$, conocidas en la teoría de números diofánticas" (Ríbnikov, 191, p. 30). E, em relação a segunda consideração destaca que:

> Los conocimientos geométricos de los babilonios, por lo visto, superaban a los egipcios, ya que en los textos junto a los tipos generales de problemas se encontraban rudimentos de medición de ángulos e relaciones trigonométricas. En lo fundamental, además, ellos también contenían cálculos de áreas y volúmenes de figuras rectilíneas, comunes para la geometría elemental. [...]." (Ríbnikov, 1991, p. 30).

2.1 Alusão à ideia matemática de função

Se a identificação de relação entre variáveis de um determinado fenômeno, que pode ser representado por meio de equações e/ou por leis de formação diz respeito a atividades do campo algébrico, então o estudo das funções também faz parte da álgebra. Neste sentido, procede a afirmação de que

> O conceito de função permite estabelecer uma correspondência entre as leis matemáticas e as leis geométricas, entre as expressões analíticas (lei de formação da função) e os lugares geométricos (conjuntos de todos os pontos que gozam de uma mesma propriedade). Para estabelecer essa correspondência não há mais que, a cada *expressão analítica*, fazer corresponder aquele *lugar* que define a mesma função que ela. A expressão analítica ou melhor a igualdade y = *expressão analítica* chama-se *equação* do lugar que lhe corresponde; [...]." (Caraça, 2000, p. 139).

O professor frente aos aspectos demarcados, neste estudo, precisa estar atento às informações que deseja comunicar, pois as atividades e os procedimentos podem dificultar a aquisição do que se deseja ensinar. Por exemplo, Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (1998, p. 81) destaca que,

> Praticamente todos os textos escolares em uso em nosso país definem uma função $f: X \to Y$ como um subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$ com as propriedades[2] G_1 e G_2 enunciadas acima. Essa definição apresenta o inconveniente de ser formal, estática e não transmitir a ideia intuitiva de função como correspondência, transformação, dependência (uma grandeza função de outra) ou resultado de movimento. Quem pensaria numa rotação como um conjunto de pares ordenados? (Lima, 1998, p. 81)

O que foi destacado acima por Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (1998) pode ser caracterizado na definição trazida por Bianchini e Paccola (2003, p. 49):

> Sejam dados, por exemplo, os conjuntos $A = \{2,3,5\}$ e$B = \{1,3,4,6\}$, vamos considerar os conjuntos de pares (x, y) tais que $x \in A$ e $y \in B$. Sabemos que em qualquer um desses conjuntos é chamado relação de$A$ em B; porém, se a relação associar cada elemento de$A$um único elemento de B, dizemos que ela é uma função de$A$em B (Bianchini; Paccola, 2003, p. 49).

No momento, pode-se trazer o objeto matemático de interesse desta pesquisa que, de modo abrangente, envolve o estudo de função afim. Neste contexto, a função linear pode ser abordada como um subconjunto das funções afins que, por sua vez, segundo Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (1998, p. 92): "A função linear, dada pela fórmula $f(x) = ax$, é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade. [...] é, provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios".

Para especular os intentos educativos do enfoque teórico específico do conhecimento matemático enquanto objeto de interesse, pode-se partir de algumas inquietações relacionadas aos quatro questionamentos seguintes: 1º. O que caracteriza o campo matemático no qual o conceito de função se situa? 2º. Em que parte desse campo encontra-se as bases do conceito de função? 3º. Como se relaciona o conceito de função com o campo da álgebra? 4º. Como estabelecer o conceito de função afim e suas derivações a partir do conceito de função em sua forma mais geral? Estes, dentre outros questionamentos, podem subsidiar inquietudes relevantes para possibilitar os alunos aprenderem e/ou ressignificarem o conceito de função afim e suas derivações.

3. METOLOGIA

De início, o propósito é situar metodologicamente a pesquisa que, como instância singular educativa, envolve um grupo de 32 alunos de um Curso de Especialização em Ensino de Matemática, composto por docentes de matemática do ensino Fundamental e Médio, todos com mais de oito anos de docência na rede pública estadual. Assim, tem-se como intuito identificar conhecimentos prévios destes professores sobre álgebra para subsidiar a elaboração e o uso de um material de ensino (texto de apoio) no âmbito do que se chamou nesta pesquisa de ADAVL. Aliada à expectativa de promover mudanças nas práticas de sala de aula, quanto à abordagem de investigação, esta pesquisa situa-se no que André (2005) caracterizou como *estudo de caso qualitativo em educação* do tipo *investigação-ação*.

O texto de apoio é resultado da adaptação de uma monografia de conclusão de curso sobre álgebra de um professor especialista em ensino de matemática sob a orientação do 1º autor deste artigo. Este professor participou como colaborador na pesquisa atuando no processo de adaptação e de sua utilização que aconteceu em *Didática da Matemática*, disciplina de 60 horas ao longo de um mês. Os instrumentos de coleta foram: questionários diagnósticos (QD), questionários avaliativos (QA), mapas conceituais, registros em diário de bordo e entrevistas. Cabe ressaltar que este artigo traz um recorte de uma pesquisa que, além de investigar a produção deste texto de apoio sobre álgebra, também investigou a elaboração e o uso de outros três textos de apoio, sobre respectivamente o ensino de *combinatória*, *lógica matemática* e *geometria euclidiana*.

O ato educativo exige do docente um propósito que vai além da tarefa de difundir conhecimento, basta imaginar a diversidade de implicações que podem estar relacionadas ao intento de levar em consideração aquilo que o aprendiz já sabe. Isso tem um grande impacto neste estudo, uma vez que este e outros preceitos da TAS podem influenciar profundamente a qualidade pedagógica das ações, atividades e situações a serem elaboradas como parte integrante do texto de apoio organizado com o intuito de que seja qualificado como Material Potencialmente Significativo.

Motivado por este intento, esse referido texto de apoio, enquanto proposta educativa vivenciada em sala de aula com os participantes, faz uso de ambiente informatizado com intuito de potencializar tanto os aspectos didáticos epistemológicos quanto os metodológicos, por meio das situações planificadas, fomentando habilidades matemáticas sobre esta linguagem e seus instrumentos, enquanto competências para manejar distintas representações de entidades matemáticas, conforme Niss (2010, p. 34), a fim de "*compreender* (decodificar, interpretar, distinguir) e utilizar *vários tipos de representação* de entidades matemáticas; *entender as relações* entre representações diferentes da mesma entidade; *escolher, fazer uso de* e alternar representações diferentes".

Essas competências almejadas advindas do projeto dinamarquês KOM, por meio do estudo de Niss (2010), foram vivenciadas com o uso do recurso tecnológico, *software Cabri-géomètre*, pois os seis enfoques seguintes da pesquisa de Henriques (2000, p. 63) mostraram-se viáveis para atender os interesses desta pesquisa: "[...] a efetivação de uma *construção*, uma *exploração* da figura acontece. Isso pode levar a formulação de uma *conjectura*, a qual vai-se procurar *verificar* sobre diferentes configurações e, depois, *validar* (*busca de um contra-exemplo*), enfim, *demonstrar* formalmente".

A pesquisa envolveu a sistematização de três Situações Didático-epistemológicas, todas organizadas em forma de ADAVL por Silva (2009). Na formulação das atividades que

[2] G_1 e G_2 são as condições necessárias e suficientes para um dado subconjunto , representar o gráfico da função .

constituem cada uma das três situações, almeja-se explorar regularidades no âmbito da geometria euclidiana plana, a partir de movimentos propiciados pelo ambiente informatizado, enfatizar o conteúdo algébrico de funções afins e suas derivações.

3.1 Descrição do processo metodológico

As três situações do texto de apoio correspondem aos ensinamentos realizados na intervenção, organizadas em forma de atividades segundo seus conjuntos de ações. Os procedimentos adotados para o desenvolvimento do estudo não devem ser vistos como algo que se assemelhe a um receituário, e sim como procedimentos voltados para orientar os participantes, por exemplo, sobre o uso do *software* enquanto aplicativo adotado.

No primeiro momento da primeira etapa, foram disponibilizados cinquenta minutos para resolução do questionário diagnóstico e, no segundo momento, foi dado quarenta minutos para elaboração de um mapa conceitual sobre álgebra. Em seguida, com a duração de uma hora e trinta minutos, foi apresentada uma visão geral sobre as intenções educativas deste trabalho, inclusive, o papel do texto de apoio que seria usado ao longo da intervenção.

Na segunda etapa, a primeira atividade didática com o computador visava dar conta da familiarização dos participantes com o Cabri. Trata-se do resgate de conceitos geométricos primitivos e algumas relações entre eles, com duração de três horas e vinte minutos. Por fim, na finalização dessa atividade, houve a apresentação de um mapa conceitual sobre função linear elaborado pelo professor, levando em consideração as ideias pertinentes obtidas ao longo do desenvolvimento dessa primeira atividade, com duração de vinte minutos.

A segunda atividade desta etapa, com a utilização do Cabri, consiste em desenvolver o conceito de função de proporcionalidade, utilizando-se também o *Tangram* [3], por tratar-se de um material didático já conhecido pelos participantes. Esse momento foi vivenciado em 3 horas e 20 minutos.

A terceira atividade iniciou-se com a indagação: é possível, no âmbito da geometria plana, representar todos os possíveis tipos de funções afins? A planificação da resposta, por parte do professor colaborador supervisionado pelo 1º autor deste artigo, com a colaboração discursiva dos alunos usando o Cabri, teve a duração de 1 hora e 20 minutos.

3.2 Proposta Didática

Para subsidiar a aquisição de conhecimentos sobre função, em particular, função de proporcionalidade, esta proposta atribui, inicialmente, certa relevância ao resgate de alguns conceitos geométricos básicos. Isso foi feito por meio do uso do Cabri, buscando aclarar tal relevância. À medida que esses conhecimentos básicos geométricos são trabalhados de forma intuitiva, com o manuseio da máquina diante das atividades bem estruturadas, acredita-se que a função de proporcionalidade seja assimilada de forma mais significativa. Em seguida, serão apresentadas as três situações didáticas que compõem esta proposta, constituídas por sua(s) atividade(s) segundo sua(s) ação(ões).

1ª Situação: Resgate de Entes Geométricos com o uso do Cabri.

Descrição da Situação: Os alunos, efetivamente, são convidados a construírem pontos, segmentos e retas (transversais e paralelas), nomeá-los, colori-los e manipulá-los. A atividade 1 (Resgate de Entes Geométricos com o uso do Cabri – Construir: pontos, retas, segmentos e nomeá-los) é constituída por um conjunto de seis ações que tem a finalidade de familiarizar o aluno com o uso deste s*oftware*. A atividade 2 (medidas de segmentos e construções de retas transversais e paralelas) possui dois momentos de especulação, o primeiro com três ações e o segundo com sete ações, ambos se ocupam particularmente em viabilizar condições para que os alunos identifiquem regularidades a partir do ponto que as originou diante do movimento da reta t (ou m), com intuito de que possam vislumbrar a existência de proporcionalidade.

2ª Situação: A Conceitualização de Proporcionalidade

Descrição da Situação: Os alunos, após uma preparação com a situação anterior, são motivados na atividade 1 para criarem retas paralelas cortadas por transversais e medir segmentos. Em seguida, na atividade 2, calculam usando a calculadora do Cabri e comparam os resultados obtidos. Depois, na atividade 3, movimentam as retas, a fim de identificar se ocorre algum tipo de regularidade. Por fim, a atividade 4 ocupa-se de estimular/explorar as ideias subjacentes à proporcionalidade no âmbito conceitual com a construção de um mapa conceitual. Em síntese, diante da movimentação de retas transversais, com o uso do já mencionado *software*, explorando o Teorema de Tales, espera-se que o aluno consiga identificar a constante de proporcionalidade a partir de variações direta entre as variáveis, para que com isso possa compreender significativamente, o conceito de proporcionalidade.

3ª Situação: uso do Cabri para identificar a Função Linear embasada no Teorema de Tales

Descrição da Situação: nesta situação, são desenvolvidas quatro atividades do tipo teórico e prático, explorando os conceitos de plano cartesiano e função, utilizando-se tanto de material impresso quanto do Cabri. Nestas atividades, explora-se um tipo de confronto entre a dinâmica em tempo real advinda da recursividade do Cabri, em oposição ao papel estático, inerente ao uso do quadro branco e pincel, com intuito de que os movimentos oriundos do uso do Cabri ajudem a desvelar características do conceito de função linear, obscuras ao uso do quadro branco. De certo modo, esses objetivos, no âmbito da informática, podem encontrar respaldo em estudos como Bellemain (1992), Laborde e Capponi (1994), Lévy (2001) e, mais recente, em Barnard, May, Duke e Duce (2000), Gomes (2008), dentre outros.

Na atividade 1, os participantes são colocados frente a ações construtivas que lhes permitem reconhecer aspectos como os

[3] Quebra cabeça de origem chinesa na dinastia Song (960-1279 d.C.) constituído por 7 peças poligonais: 5 triângulos, dois maiores com mesma área que adicionadas representam a metade da área do Tangram; dois pequenos também com mesma área e um médio cuja área é a soma da área dos dois pequenos; 1 quadrado e 1 paralelogramo, ambos têm a mesma área, que correspondem a soma da área dos dois triângulos pequenos.

apontados por Henriques (2000) para, em seguida, comparar áreas de figuras geométricas planas distintas bem como ações que lembrem propriedades subjacentes ao conceito do teorema de Tales. A atividade 2, em suas três ações, procura subsidiar o conceito de função a partir dos conhecimentos prévios dos participantes sobre números reais, abscissa, ponto, plano cartesiano, taxa de variação e construção de tabelas. Na atividade 3, será explorado o conceito de lugar geométrico. A atividade 4, diante dos consolidados nas atividades 1, 2 e 3, busca nas relações existentes entre os temas abordados, por meio do movimento proporcionado pelo Cabri, diferenciar e reconciliar os conceitos de função afim, função linear e função de probabilidade.

3.3 Critérios Adotados para Análise dos Dados

Estes critérios sugerem parâmetros para apreciar se, após vivenciarem as três situações que compõem a proposta planificada, os alunos conseguem vislumbrar os seus intentos educativos. A não apresentação dos *3.3.1 a Critérios para analisar a 1ª Situação* e *3.3.1b Critérios para analisar a 2ª Situação* decorre do pressuposto de que estas ausências não comprometam o esclarecimento da compreensão na discussão das análises, ao contrário da situação 3, que segue.

3.3.1 Critérios para a análise da 3ª Situação

Atividade 1: Construção de um Tangram

Inicia-se explorando recursos do Cabri como a construção de círculos, circunferências e quadrados indicados na figura 01, conforme a seguinte instrução: dê um Clique em POLIGONOS REGULARES (janela 3). O primeiro clique na tela faz surgir uma circunferência. O segundo Clique na tela definirá o número de lados do polígono regular desejado, à medida que se move no mouse. O terceiro Clique determina a construção do quadrado. Após a construção do quadrado, orienta-se a construção de uma diagonal com o recurso SEGMENTO (janela 3).

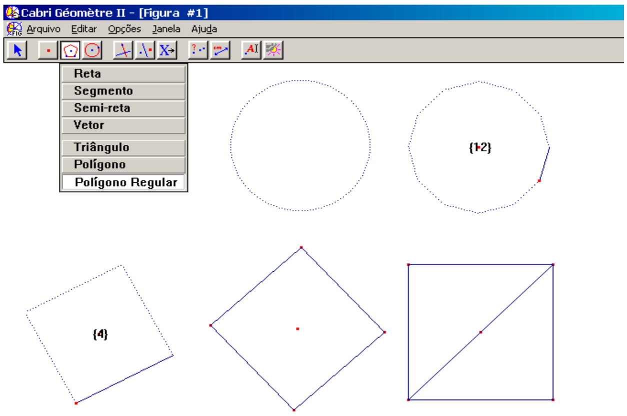

Figura 01: Construção de um quadrado

Fonte: Silva (2009, p. 144)

A construção do Tangram (figura 02) envolveu a realização da seguinte sequencia de seis ações: *Ação 1*: construir um quadrado identificando seu ponto médio e sua diagonal; *Ação 2*: determinar os quatro vértices, dos pontos médios dos lados adjacentes e dividir a diagonal em 4 partes iguais; *Ação 3*: obter uma reta paralela à diagonal que contenha os dois pontos médios anteriores, e, além disso, determinar seu ponto médio; *Ação 4*: obter um segmento que passe pelo ponto médio da diagonal, tendo como origem o ponto médio determinado anteriormente e, como extremo, o vértice do quadrado; *Ação 5*: obter o segmento que tem como origem um dos dois pontos médios obtidos na Ação 1, e, como extremo, um dos quatro pontos que constituem a divisão realizada na mesma Ação 1, sabendo que tal segmento forma com a diagonal um angulo reto; *Ação 6*: obter o segmento que tem como origem o ponto médio determinado na Ação 3, e, como extremo, um dos quatro pontos que constituem a divisão da diagonal da Ação 2, sabendo que tal segmento é paralelo a dois dos lados do quadrado inicial.

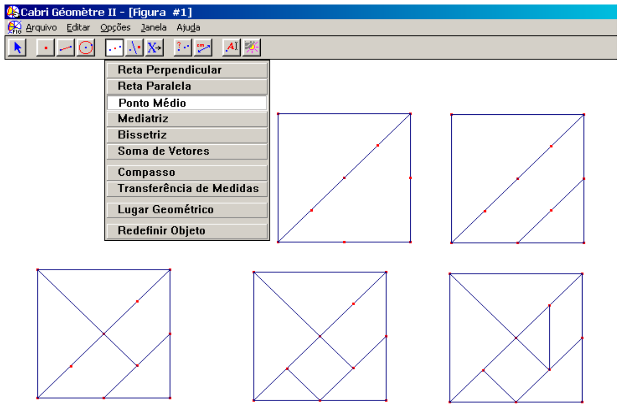

Figura 02: Construção do Tangram com o *Cabri*.

Fonte: Silva (2009, p. 145)

Atividade 2: Gráfico da Função Linear a partir de áreas do *Tangram* com o Cabri.

Ação 1: Construir uma tabela (figura 02), indicando para cada uma das formas (peças), quantas delas são necessárias para cobrir toda a área do *Tangram*.

Tipo de peças do Tangran	t	t_m	T	P	q	Q
Número de peças para formar o Tangran	16	8	4	8	8	1

Figura 03: Quadro 1 – Área do tangram com cada peça

Fonte: Silva (2009, p. 145)

Ação 2: construa uma tabela que relacione a área do *Tangram* em função da área do triângulo menor. Use as medidas inteiras 1, 2, 3, 4, 8, 16, 17, 18, 19, 20 para a quantidade de área do triângulo menor e construa um quadro organizando estes dados.

X	1	2	3	…	…	…	8	9	10	…	…	…	19	20	21	…
Y	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	…	…	…	$\frac{8}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{10}{16}$	…	…	…	$\frac{19}{16}$	$\frac{20}{16}$	$\frac{21}{16}$	…

Figura 04: Tabela 1 – Área do tangram com a menor peça

Fonte: Silva (2009, p. 146)

Ação 3: Usando o Cabri (recurso novo eixo), executar as seguintes ações:

Ação 3.1: construir o gráfico (figura 3), a partir da comparação entre a área de cada peça do *Tangram*, em relação à área do triângulo menor que o compõe; Ação 3.2: determinar a sua taxa de variação, usando a calculadora do Cabri. Ação 3.3: Escrever com suas palavras, qual o tipo de relação existente entre a taxa de variação e o teorema de

Tales; Ação 3.4: responder a seguinte pergunta: você poderia explicar?

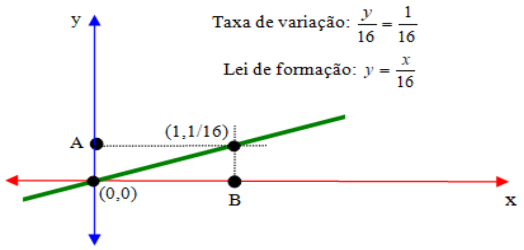

Figura 05: Gráfico 01 – Função de proporcionalidade

Fonte: Silva (2009, p. 146)

Possível explicação para Ação 3.4: a taxa de variação entre essas relações representa uma constante de proporcionalidade

Atividade 3: Fundamentação Teórica sobre o Lugar Geométrico

Com auxílio de material impresso e de retroprojetor, realizar uma exposição teórica sobre *lugar geométrico*, exemplificando com a circunferência e a mediatriz de um segmento. Wagner e Carneiro (2007) enfoca que a expressão lugar geométrico é algo antigo no âmbito da geometria. O aponta que ela em si refere-se a um conjunto de pontos que possuem certa propriedade. Por isso, para ele, deve ficar claro que se uma figura F é o lugar geométrico dos pontos que possuem a propriedade P, então todos os pontos de F possuem tal propriedade e nenhum ponto fora de F tem a referida propriedade P.

Exemplo 1. Circunferência de centro O e raio r é o lugar geométrico dos pontos *P* do plano que distam de um ponto central *O* a distância *r*.

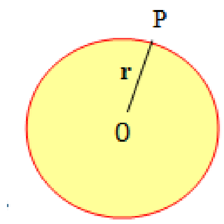

Figura 06: Circunferência de centro *O* e raio *r*

Fonte: Silva (2009, p. 147)

Exemplo 2. Mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam de uma mesma distância dos pontos extremos do segmento dado.

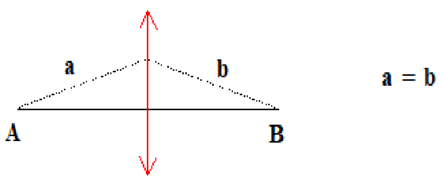

Figura 07: Mediatriz de um segmento AB

Fonte: Silva (2009, p. 147)

Ação 4**:** Construção do gráfico da Função Linear a partir do Cálculo da Área com as peças do *Tangram*, usando o Recurso Lugar Geométrico do Cabri.

Construção do gráfico (Figura 8) a partir do gráfico da figura 5, levando em consideração a noção de lugar geométrico. Isso significa que deve ser criado um sistema de retas que, ao se variar a abscissa de um ponto no eixo horizontal, a ordenada de um ponto no eixo vertical também varie, obedecendo à lei de formação da função.

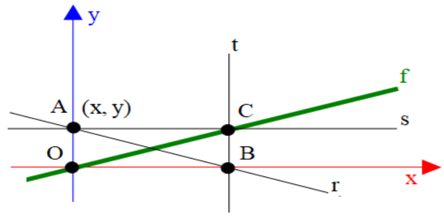

Figura 08: Gráfico 2 - Função de proporcionalidade

Fonte: Silva (2009, p. 147)

Convenções: *Linha vermelha*: eixo das abscissas; *Linha azul*: eixo das ordenadas; *Linha verde*: reta da função; *Linha preta*: retas auxiliares.

Para que o ponto (*x*, *y*) da função mantenha a mesma proporção, cria-se a reta auxiliar *r*, cortando o eixo dos *y* em $\frac{1}{16}$ e o eixo do *x* em 1.

Esta reta deve ter o ponto de origem, coincidindo com o ponto de abscissa 1, ponto *B*. Cria-se o ponto *A* de interseção entre *r* e o eixo dos *y*.

Obs.: quando a reta auxiliar for movimentada por meio do ponto que a originou, sua direção no plano será mantida paralelamente à posição inicial.

Cria-se a reta *t* perpendicular ao eixo das abscissas em $x = 1$ e a reta s perpendicular ao eixo das ordenadas em $y = \frac{1}{16}$.

Obs.: O ponto comum a essas duas últimas retas é o ponto *C* $(1, \frac{1}{16})$ da função. Com a noção de Lugar geométrico, pode-se visualizar o gráfico da função de proporcionalidade. Após dar um clique na opção lugar geométrico, clica-se no ponto *B* e depois no ponto *C*.

3.3.2 Critérios para Análise dos Questionários

A análise deste critério foi explorada a partir dos tipos de concepções sobre a álgebra da escola média, caracterizados por Usiskin (1995), em particular, as três primeiras concepções: *a álgebra como aritmética generalizada* (1); *álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas* (2); *álgebra como estudo de relações entre grandezas* (3).

As três primeiras questões correspondem às três primeiras concepções de Usiskin (1995) e, com elas, procura-se investigar o tipo de compreensão dos alunos acerca das *ideias matemáticas características do campo* algébrico neste contexto. A quarta questão procura averiguar, levando em conta a compreensão anterior, um tipo de especificidade da terceira concepção de Usiskin (1995). Ou seja, investiga-se como se encontram as ideias dos alunos sobre função de proporcionalidade, função afim e função linear, em particular, como estão suas inter-relações.

3.3.2a Questionário Diagnóstico

Na perspectiva de obter algo que permita dialogar com os achados na análise dos resultados, com o intuito de explicitar a potencialidade do novo material de ensino, recorre-se ao segundo item de uma conclusão advinda do próprio Ausubel (2002, p. 39):

> Por lo tanto, y en conclusión, en cualquier disciplina dada se puede influir en la estructura cognitiva del estudiante: 1) […]; 2) de una manera programática mediante métodos adecuados de presentar, disponer y comprobar la adquisición significativa de una materia empleando un material de instrucción adecuadamente programado y previamente comprobado, y manipulado de forma apropiada tanto las variables cognitivas como las de carácter social y las relacionadas con la motivación y la personalidad. (Ausubel, 2002, p. 39)

A seguir, são apresentadas as expectativas de respostas dos alunos ao QD e, posteriormente em QA, no item 3.3.2b. Em ambos os casos se tem uma finalidade análoga aos intentos apontados por Novak e Gowin (1984) quanto ao que chamaram de mapas de referência.

1°) Diante das expressões: 1×2 = 2×1, 2×3 = 3×2; 4×5 = 5×4, e outras similares, questiona-se: tipo de propriedade você pode eleger?

Perguntas e respostas: a×b = b×a.

i) O que você está observando em cada uma das expressões dadas acima?

Resposta: "a multiplicação de dois números, em que a diferença de um lado para o outro da igualdade é a troca do posicionamento dos já referidos dois números (comutatividade). E identificando que trocando a ordem de dois quaisquer desses números o resultado da multiplicação (produto) permanece o mesmo".

ii) Qual o motivo dessa ação?

Resposta: "estabelecer a regra comutativa da operação de multiplicação (Generalizar), a partir da 'interpretação da regularidade aritmética' (Traduzir) segundo as expressões dadas".

Obs.: Quando o aluno se referir a generalização, como justificar/provar/mostrar sua resposta ao item (ii) ser considerada correta?

2°) A soma de um número, com o seu triplo é 12. Encontre o número mencionado.

i) O que você está fazendo ao escrever a formulação $x + 3x = 12$, que possibilita encontrar o tal número mencionado?

Resposta: "equacionando com variáveis do tipo incógnitas e/ou constantes (simplificar)";

ii) Qual o motivo dessa ação?

Resposta: "Para solucionar o problema (resolver)".

3°) Sabendo-se que, uma reta pode ser representada por equações do tipo $y = mx + b$, encontre a equação da reta que passe pelos pontos (1, 0) e (2, 1).

i) O que representa a equação $y = mx + b$, nesta situação?

Resposta: "um *modelo de variável* ou uma *fórmula"*.

ii) O que você está fazendo ao determinar a equação da reta?

Resposta: "encontrando m e b, sabendo que m e b são parâmetros que se transformaram respectivamente em incógnita e constante; e x é um argumento".

iii) Qual o motivo dessa ação?

Resposta: "obter um modelo geral que permita determinar qualquer ponto da reta representada por tal modelo".

4°) Você poderia dizer se existe alguma diferença e/ou semelhança entre os conceitos de função afim e função linear? Justifique sua resposta?

Resposta: "sim".

Resposta: "as funções polinomiais do 1º grau são funções afins e geometricamente representam retas. Logo, a função linear é caso particular da afim, no modelo geral $b = 0$, o que geometricamente significa que as retas que representam funções lineares passam pela origem no sistema de eixos cartesiano. Por outro lado, as funções afins que são lineares representam também as funções de proporcionalidade, enquanto as funções afins não lineares não representam funções de proporcionalidade".

3.3.2b Questionário de Avaliação

1°) Betinho deseja cercar o jardim em seu sítio que possui uma área de $20\,m^2$. Sabendo-se que ele gastou $36\,m$ de arame, para dar duas voltas completas, quais são as dimensões do jardim?

Resposta:

$$\begin{cases} S = xy \\ C = (2x + 2y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 20 = xy \quad (1) \\ 36 = 2x + 2y \Rightarrow 18 = x + y \quad \Rightarrow (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1):

$$9 = x + y \Rightarrow y = 9 - x$$
$$20 = x(9 - x)$$
$$20 = 9x - x^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 18x + 20 = 0 \\ x = 4 \quad e \quad y = 5. \end{cases}$$

Resposta: $x = 4$, temos: $y = 5$.

i) Que tipo de ação você, inicialmente, está fazendo para resolver este questionamento?

Resposta: "equacionando com variáveis do tipo incógnitas e/ou constantes (Simplificar)".

ii) Qual o motivo dessa ação?

Resposta: "solucionar o problema".

2°) Sejam as expressões, enquanto produtos: 1×2; 2×4; 4×8; 8×16 e, assim por diante, é possível eleger algum tipo de propriedade?

Resposta**:** "sim".

i) O que você está observando em cada uma das expressões acima?

Resposta: "que apesar de distintas, essas expressões podem ser representadas por multiplicações de um mesmo número, no caso, o número dois".

ii) Qual o motivo dessa ação?

Resposta: “propiciar o reconhecimento da álgebra enquanto estabelecimento de *generalização aritmética* (Generalizar), evidenciada a partir da interpretação de regularidades aritméticas (traduzir). Em particular, tal regularidade remete a 2^{2n+1} como generalização, sendo n um número natural”.

3°) Na produção de mangas sem agrotóxicos o produtor tem um custo fixo de R$ $1.000{,}00$, acrescentando-se ao custo fixo um custo adicional de R$ $0{,}20$ por caixa de mangas produzidas. Se o custo total é dado a partir da relação do número de caixas produzidas, determine:

i) O modelo que representa este fenômeno?

Resposta: “C = *1000 + 0,20 c*, em que C representa o custo total e c é um número inteiro que irá corresponder a quantidade de caixas de mangas produzidas. Com tal modelo, pode-se identificar o custo a partir do número das já referidas caixas produzidas”.

ii) O que você está fazendo ao determinar o modelo anterior?

Resposta: “Obtendo uma fórmula (modelo)”.

iii) Qual o motivo dessa ação?

Resposta: “determinar o custo a partir do modelo formulado segundo o valor dado por caixa produzida”.

4°) Sabendo-se que cada caixa de manga sem agrotóxico produzida é vendida por R$10,00 determine:

i) O modelo que possa representar este fenômeno de receita;

Resposta: “*R + 10* c. Neste modelo, R representa a receita enquanto c continua sendo um número inteiro que irá corresponder a quantidade de caixas de mangas vendidas. Com este modelo se pode determinar a receita a partir da quantidade de caixa vendida”.

ii) Se existe alguma diferença e/ou semelhança entre esse modelo de receita e o modelo de custo da questão anterior.

Resposta: “sim”.

Ambos os modelos, o da questão anterior e o obtido na quarta questão, são funções do tipo afim, mas o segundo é função linear, e, portanto, de proporcionalidade.

3.3.3 Critérios para os Mapas Conceituais

Os mapas dos alunos foram elaborados no âmbito do modelo simplificado de fazer mapa conceitual, pautado na *diferenciação progressiva*, em que os conceitos mais gerais e inclusivos estão no topo do mapa e de cima para baixo no eixo vertical. Os outros conceitos encontram-se em ordem descendente de inclusividade com os conceitos mais específicos na parte final do mapa (Moreira; Masini, 2011). Por sua vez, vale ressaltar que os mapas conceituais são recursos didáticos que, entre outros aspectos, por meio das

> [...] estruturas hierárquicas permitem uma avaliação relativamente fácil pelo professor, uma vez que as secções de um mapa conceptual que sejam ou muito genéricas ou muito específicas sobressaem, indicando má compreensão ou a necessidade de uma integração mais cuidadosa entre conceitos subordinados e superordenados. (Novak & Gowin, 1984, p. 114).

Quanto aos mapas conceituais, Novak e Gowin (1984, p. 52) apontam que:

> Pode-se construir e pontuar um mapa de referência para o material que se vai representar nos mapas conceptuais. Depois, dividem-se os pontos dos alunos pela pontuação obtida para esse mapa de referência, obtendo-se deste modo uma percentagem que serve de comparação. [...]” (Novak; Gowin, 1984, p. 52).

Os mapas conceituais das figuras 09 e 10 sobre álgebra, produzidos pelo professor colaborador sob a orientação do primeiro autor deste artigo, subsidiaram a análise nesta pesquisa.

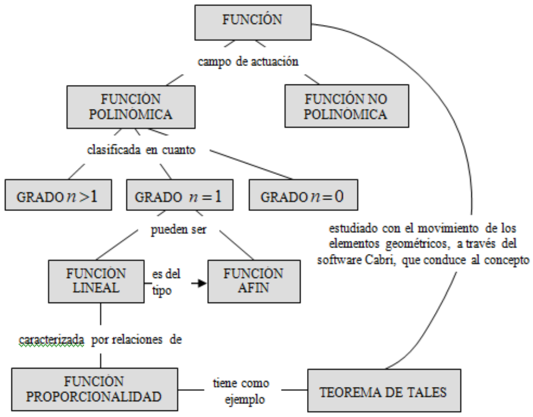

Figura 09: Versão Inicial do Mapa Conceitual de Álgebra

Fonte: Adaptado de Silva (2009, p. 345)

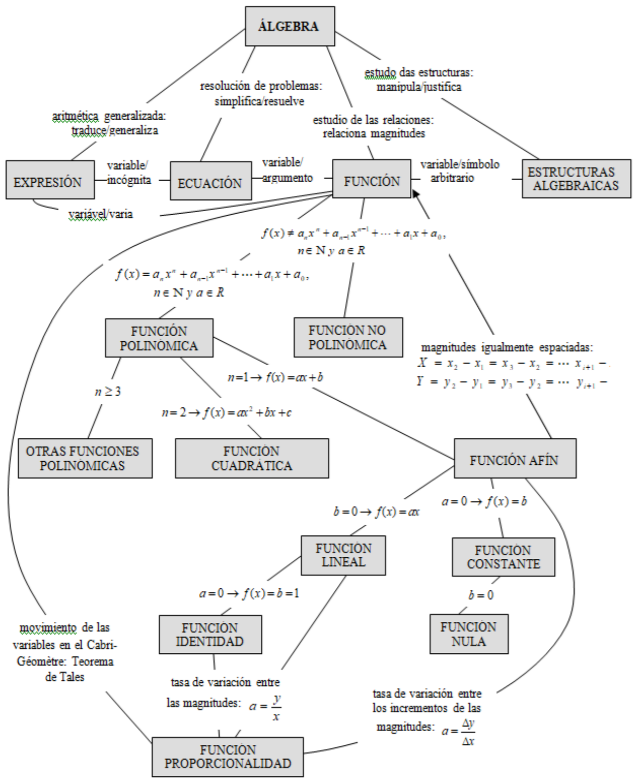

Figura 10: Versão Final do Mapa Conceitual de Álgebra

Fonte: Adaptado de Silva (2009, p. 182)

Em síntese, os critérios de análise foram pautados a partir do que Ausubel (2002) chamou de *sistemas de informação*, conforme Moreira e Masini (2011), em lugar do que Novak e Gowin (1984) trazem como *mapa de referência* conforme estes três enfoques: 1. Seleção Conceitual (Conceito

Geral/Inclusivo); 2. A Inclusividade (Conceitos Intermediários) e 3. As Relações Significativas (proposições entre conceitos), considerando três categorias: Inferior (a), Equivalente (b) e Superior (c):

1. *Inferior*, quando o conceito do mapa do aluno for menos significativo do que o mapa de referência;

2. *Equivalente*, quando o conceito do mapa do aluno for idêntico e/ou correlato ao mapa de referência;

3. *Superior* quando o conceito do mapa do aluno for mais significativo que o mapa de referência.

Obs.: Para evitar ambiguidade nos mapas dos alunos, os conceitos específicos não devem ter ligações horizontais, caso ocorra será considerado intermediário.

4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este tópico foi desenvolvido em duas etapas. A primeira debate a concepção algébrica dos alunos a partir do confronto das transformações dos dados do QD e do QA. Já a segunda relata a percepção dos elaboradores do texto de apoio, o professor colaborador e o pesquisador, a partir dos dois mapas conceituais (figuras 07 e 08) criados no processo de elaboração deste material de ensino.

4.1 Análise e Discussão dos Questionários

Nesta parte, na interpretação dos resultados no que diz respeito a resposta dos alunos aos questionários QD e QA chamam atenção os aspectos relacionados ao conteúdo da ação e do motivo da ação.

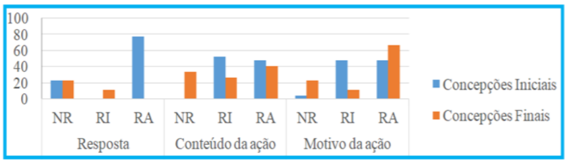

Figura 11: Gráfico 03 – Aritmética Generalizada

O melhor desempenho dos alunos na identificação da propriedade comutativa da multiplicação nas expressões algébrica no QD, comparando a questão correspondente do QA conforme o gráfico 03, indica que as instruções *traduzir* e *generalizar* inerentes a '*concepção da álgebra como aritmética generalizada*' (Usiskin, 1995) já povoavam a estrutura cognitiva desses alunos.

O *conteúdo da ação*, relativo ao reconhecimento de um modelo que possa traduzir e generalizar, explicita que a propriedade comutativa (a×b = b×a) em QD, em termos de RA, foi superada por 2^{2n+1}, enquanto modelo elaborado na mesma perspectiva no QA. Porém, quanto ao *motivo da ação* relacionado a saber o que é preciso fazer para se chegar à resposta, sobre as RA de QA, o resultado superou significativamente em termos percentuais as respostas RA de QD.

As respostas à 1ª questão de QD e QA, acerca do *conteúdo* e do *motivo da ação*, indicam uma boa desenvoltura dos alunos sobre a concepção da *álgebra como aritmética generalizada*. Estas afirmações podem ser evidenciadas por meio dos protocolos 1_a e 1_b:

Protocolo 1_a: antes da Intervenção – Resposta à pergunta A_{24}: "*Comutativa*". Por não responder o conteúdo e o motivo da ação, foi complementado com as respostas de A_{17}: Conteúdo da Ação – "Existe uma Aritmética destacada na Álgebra" e sobre o Motivo da Ação – "Colocar operações simples com visões numéricas".

Protocolo 1_b: Após a Intervenção – Resposta à pergunta A_{18}: "Sim, 2^{2n-1}". Respostas ao Conteúdo da Ação – "Uma regularidade de características exponencial", quanto ao Motivo da Ação – "Identificar e formular uma regularidade implícita na pergunta", respectivamente.

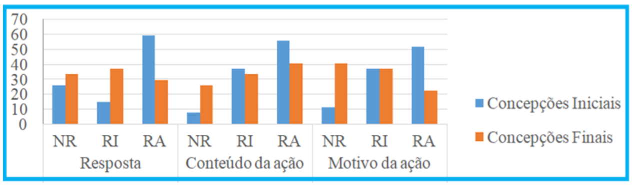

Figura 12: Gráfico 03 – Resolução de Problemas

As respostas RA dos alunos no QD sobre o equacionamento e o uso de relações com uma variável do tipo incógnita/constante, percentualmente maior que as suas correspondentes em QA, como se observa no gráfico 04, também há um excelente povoamento da *concepção da álgebra como meio de resolver certos problemas* (Usiskin, 1995) na estrutura cognitiva dos alunos.

As RA sobre o *conteúdo da ação* que envolve o desvelar de um modelo com variáveis do tipo incógnitas ou constantes para dar conta da atividade, apesar de apresentar um percentual de aceite em QA menor que os de QD, representam um bom desempenho dos alunos. Já o *motivo da ação* relacionado ao propósito de *simplificar e resolver*, em termos de resultado, mesmo menor que os revelados no conteúdo da ação, podem ser considerados bons.

Essa caracterização das respostas dos alunos sobre a concepção algébrica pode ser observada nos protocolos 2_a e 2_b seguintes:

Protocolo 2_a: Antes da Intervenção – Resposta à pergunta A_{11}: "Não respondeu". Resposta ao Conteúdo da Ação e ao Motivo da Ação A_{18}: "Escrevendo o texto que aparece mais acima, em linguagem matemática" e "Simbolizar algumas expressões que se encontram na forma verbal textual".

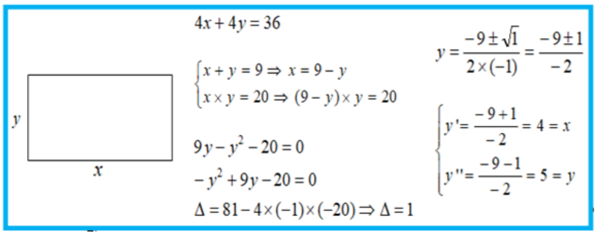

Figura 13: Protocolo 2_b - A_{31} após a Intervenção

Fonte: Adaptado de Silva (2009, p. 292)

Respostas ao Conteúdo e ao Motivo da Ação, nesta ordem, A_{07}: "Equacionando" e "Descobrir as dimensões".

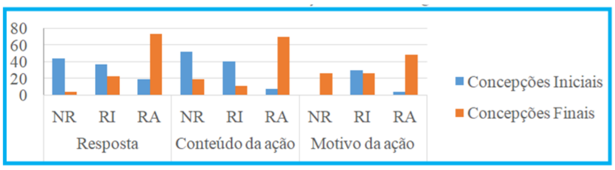

Figura 14: Gráfico 03 – Estudo das Relações

O gráfico 05 revela uma excelente evolução nas RA dos alunos para obter um modelo entre variáveis que variam, do tipo argumentos e/ ou parâmetros, relacionadas à concepção da *álgebra como estudo de relações entre grandezas* (Usiskin, 1995), com o propósito de representar o fenômeno proposto em QD e ago análogo em QA.

As RA dos alunos sobre o *conteúdo da ação* acerca do processo de obtenção da formulação com argumento e/ou parâmetro para satisfazer os propósitos da atividade deixam explícito que os registros envolvendo QA majoritariamente superam os seus correspondentes em QD. Algo próximo, em menor discrepância, acontece no *motivo da ação*, conforme os registros das RA em QA e QD com o intuito de *relacionar* variáveis para solucionar as atividades propostas.

Faz-se necessário destacar que a apresentação do modelo generalizado da equação da reta não foi suficiente para a obtenção do argumento e/ou parâmetro da reta trazida em QD ao contrário do que ocorreu no modelo análogo para explicitar o fenômeno caracterizado em QA. Os protocolos 3_a e 3_b são trazidos na intenção de ilustrar esta ressalva apresentada sobre o estudo das relações algébricas.

Protocolo 3_a: Antes da Intervenção – Resposta à pergunta de A_{11}: "Uma reta". Resposta ao Conteúdo da Ação e ae o Motivo da Ação, trazidas de A_{11}: "Calculando com números e letras" e "Mostrar que a álgebra trabalha também sobre questões deste tipo".

Protocolo 3_b: Após a Intervenção – Resposta à pergunta de A_{11}: $y = 1000 + 0{,}20\,x$. Suas respostas ao Conteúdo da Ação e Motivo da Ação A_{07}: "Representando a fórmula que determina o custo total da relação anterior, para qualquer quantidade de caixas" e "Generalizar o problema quando o mesmo possui variáveis."

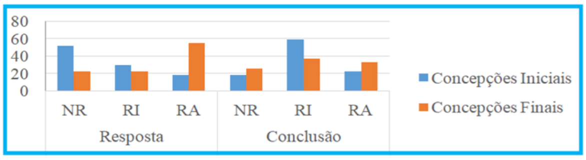

Figura 15: Gráfico 06 – Função de Proporcionalidade

A formulação do gráfico 06 relata interpretações sobre o reconhecimento de diferença e/ou semelhança entre os conceitos de função afim, linear e de proporcionalidade. As RA bem mais acentuadas em relação à questão em si, quando comparadas às conclusões apresentadas pelos alunos, revelam que o recurso da representação geométrica favoreceu a compreensão de que a função linear e a proporcionalidades são casos particulares da função afim.

Vale apenas ressaltar que ambos os modelos, o da terceira e o da quarta questão, de forma mais abrangente, são do tipo função afim. Por outro lado, no segundo modelo nesta ordem, além de função linear, também corresponde a uma função de proporcionalidade. Para ilustrar essas argumentações, são apresentados os seguintes protocolos:

Protocolo 4_a: Antes da Intervenção – Em Resposta à Pergunta em si, A_8: Não Respondeu, portanto, não apresenta justificativa.

Protocolo 4_b: Após a Intervenção – Em Resposta à Pergunta em si, A_6 explicita que: "$C_M = 10$ quantidades de caixas. Ou seja, $C_M = 10\,x \rightarrow f(x) = 10\,x$"; por sua vez, relata como justificativa que: "Não há diferença, pois, em ambos os casos, estamos tratando de funções do tipo afim, sendo, especificamente, a segunda uma função linear".

As situações acerca de três das quatro concepções da álgebra de Usiskin (1995):

1. *A álgebra como aritmética generalizada*;

2. *Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos problemas*;

3. *Álgebra como estudo de relações entre grandezas;*

4. A *Álgebra como estudo das estruturas* por não ser vivenciada no âmbito do Ensino Fundamental e Médio não foi introduzida nas ADAVL, mas as demais foram vivenciadas na intervenção pedagógica e auxiliaram na ressignificação da compreensão dos alunos sobre estas concepções.

Assim, nesta discussão, acerca da potencialidade do material de ensino produzido, texto de apoio sobre álgebra, a partir da análise dos QD e QA, como indicado no item 3.3.2a, encontra respaldo no então já apresentado extrato:

> Por lo tanto, y en conclusión, en cualquier disciplina dada se puede influir en la estructura cognitiva del estudiante: 1) […]; 2) de una manera programática mediante métodos adecuados de presentar, disponer y comprobar la adquisición significativa de una materia empleando un material de instrucción adecuadamente programado y previamente comprobado, y manipulado de forma apropiada tanto las variables cognitivas como las de carácter social y las relacionadas con la motivación y la personalidad. (Ausubel, 2002, p. 39).

4.2 Análise dos Mapas Conceituais

Nesta etapa, por meio da demarcação do item 3.3.3, a análise foi realizada em duas etapas: 41a Mapas dos alunos *versus* Mapa *sistemas de informação* (figura 08); e 4.2b Mapa *sistemas de informação* (figura 07) *versus* mapa *sistemas de informação* (figura 08).

4.1a Mapas dos Alunos

No *1º critério*: Seleção conceitual, o interesse consiste na diminuição na quantidade de conceitos inferiores *a*, e de maneira contrária, aumento dos conceitos equivalentes *b* e superiores *c*. Isto pode ser observado segundo os seguintes percentuais advindos dos mapas dos alunos produzidos antes e após a intervenção: nesta ordem, *a* passou de (17,88%) para (11,82%), *b* foi de (26,36%) para (27,88%) e *c* de (10,00%) para (25,15%). Apesar das pequenas variações percentuais de *a* e *b*, o aumento expressivo de *c* indica que houve uma melhora no desempenho dos alunos sobre a seleção conceitual.

No caso do *2º critério*: A Inclusividade, são considerados três enfoques: Generalidade, Intermediários e Específicos. Em relação à opção pela álgebra, como conceito mais geral, a sua não variação percentual de (86,88%) nos mapas produzidos, antes e depois da intervenção, revela que esses alunos já tinham um domínio deste enfoque. Quanto aos conceitos intermediários, observados em termos de horizontalidade, foram encontrados 4 níveis. No Nível 1, a mudança em *a* foi de (34,72%) para (26,61%), *b* (19,44%) para (15,28%), e *c* de (9,72%) para (40,28%); no Nível 2, *a* foi de (4,17%) para (1,39%), *b* (11,11%) para (13,89%), e *c* de (15,28%) para (26,39%); Nível 3 *a* foi de (2,78%) para (1,39%), *b* (5,56%) para (11,11%), e *c* de (0,00%) para (11,11%); Nível 4 *a* foi de (0,00%) para (0,00%), *b* (0,00%) para (2,78%), e *c* de (0,00%) para (0,00%). Em todos os níveis, exceto no nível 4, há redução no número de *a*, já *b* aumentou em todos eles e, do mesmo modo, em *c*, como em *a*, também excetuando o nível 4, as amplitudes em *c* são maiores do que as ocorridas em *b*.

Por fim, no *3º critério*: Relações Significativas, as variações dos conceitos segundo categorias *a*, *b* e *c*, no caso de *a*, passou de (2,89%) a (0, 87%), em *b* de (1,03%) a (3,15%), e em *c* não houve registros, portanto, se manteve em (0,00%). A diminuição do número de conceitos *a* e o aumento de *b* indicam melhora no âmbito deste critério mesmo sem a existência alguma de *c*.

4.1b Mapas do professor colaborador

Intervención \ Regulación		Conceptos		Relaciones	
		C^1	C^2	R^1	R^2
Antes	Total	4	6	6	1
	%	40,00	60,00	85,71	14,29
Después	Total	0	15	0	21
	%	0,00	100,00	0,00	100,00

Figura 16: Tabela 1 - Conceitos e suas relações

Fonte: Silva (2009, p. 345)

Em relação aos conceitos do mapa inicial (figura 07), 60% dos conceitos eram exclusivos do domínio conceitual da Álgebra, representando a categoria (C^1), mas 40% não faziam parte deste domínio conceitual (C^2). Por sua vez, como se pode observar no mapa que consta na versão final do referido Texto de Apoio, 100% dos conceitos pertencem à categoria C^2, portanto, neste contexto, houve uma evolução significativa neste sentido na estrutura cognitiva do especialista e do seu orientador.

No caso das relações, as consideradas fracas (R^1) diminuíram de 85,71% para 0%, enquanto aquelas consideradas muito mais significativas (R^2) aumentaram de 14,29% para 100%. Faz-se necessário registrar que no mapa inicial (figura 07) havia um total de dez conceitos e sete relações, enquanto no mapa final (figura 08), havia 15 conceitos e 21 relações.

Esses argumentos permitem afirmar que o texto de apoio potencializou a compreensão dos seus elaboradores durante a sua sistematização e que, de maneira semelhante, a sua utilização promoveu efeito análogo nos alunos. Os resultados obtidos estão alinhados com as características acerca da potencialidade do novo material de ensino, que, neste estudo, trata-se de ressignificar a compreensão dos alunos sobre funções afim, linear e de proporcionalidade segundo a perspectiva de que "[...] la mayoría del aprendizaje y toda la retención y la organización de la materia es de naturaleza jerárquica, yendo de arriba hacia abajo en función del nivel de abstracción, generalidad e inclusividad. [...]." (Ausubel, 2002, p. 32).

5. CONSIDERAÇÕES EDUCACIONAIS

O desempenho incipiente na 1ª concepção (traduzir/generalizar) nas respostas da 2ª questão de QA em relação ao seu correspondente e na 1ª questão de QD pode ser atribuído à falta de habilidades dos alunos na formulação de expressões matemáticas mais elaboradas Por outro lado, bom desempenho na aprendizagem dos alunos sobre a 2ª concepção e, mais exitosamente ainda na 3ª concepção respectivamente em termos de (simplificação/solução) e (relacionamento de grandezas), foi evidenciado nas respostas em si e nos conteúdos e motivos das ações na 2ª questão de QD e 1ª de QA bem como na 3ª questão de QD e QA. Isto permite afirmar que houve aprendizagem significativa, inclusive na constatação do aprofundamento da compreensão sobre a 3ª concepção algébrica explorada nas relações entre grandezas das ideias matemáticas de função afim, linear e de proporcionalidade com resultados exitosos nas respostas apresentadas pelos alunos.

No que concerne aos três critérios adotados para interpretar os mapas conceituais, no primeiro, a Seleção conceitual, os conceitos ditos inferiores *a* nos mapas iniciais dos alunos diminuíram e os conceitos equivalentes b e os superiores *c* aumentaram consideravelmente.

No caso do 2º Critério, a Inclusividade, segundo as subcategorias: Geral; Intermediário; Horizontalidade e Especificidade, observadas antes e após a intervenção, nesta ordem, a prevalência do conceito *álgebra* nos mapas dos alunos indica que eles já tinham domínio em termos de conceito superordenado (Conceito Geral e Inclusivo). Por sua vez, o aumento no número de conceitos equivalentes *b* representa evolução quanto aos conceitos subordinados (Intermediário). Ainda no âmbito dos conceitos subordinados sobre a horizontalidade, foram identificados até 4 níveis, em que há uma redução no número de conceitos equivalentes *b* nos níveis 1 e 2, mas nos níveis 3 e 4 aconteceu um pequeno aumento de *b* e outro ligeiramente maior nos conceitos superiores *c*, o que caracteriza pouca evolução nesta subcategoria. E, no âmbito da subcategoria, Conceitos Específicos (Pouco Inclusivos), a diminuição no número de conceitos *a* e *c* aliada ao aumento de conceitos *b* constituem variações importantes no reconhecimento dessas modificações. Assim, segundo estes subcritérios abordados, conclui-se que as mudanças observadas indicam uma evolução neste 2ºcritério, a Inclusividade.

As Relações Significativas, quanto ao terceiro critério, mantiveram-se pequenas nos mapas iniciais e finais. Apesar da diminuição nas relações inferiores *c*, ocorreu um pequeno aumento nas relações equivalentes *b*, e bem menor nas relações *c*, considerando as dificuldades que Novak e Gowin (1984) destacam sobre elas, pode-se dizer que os alunos também melhoraram neste requisito.

Enfim, os intentos da ADAVL quanto à TCC, as situações distintas tratadas em QD e QA envolvendo as tarefas relacionadas às ideias matemáticas de função afim permitiram que os alunos construíssem novos esquemas, ampliando seus repertórios sobre este campo conceitual. O que, por meio da TA, foi corroborado nas respostas relacionadas aos três enfoques sobre a ação: 1º o conteúdo da ação, 2º o que está sendo feito para resolver a atividade e 3º qual o motivo da ação, visto que: "[...]? Para Leontiev, el sentido del acto es dado por aquello que une, en la conciencia del sujeto, el objeto de su acto (su contenido) al motivo del mismo" (Duarte apud Silva 2009, p. 55).

E quanto às TAS, os subsunçores sobre função afim dos participantes: alunos, professor colaborador e 1º autor deste artigo aliados à intencionalidade para aprender explicitadas na análise dos questionários e, em especial, dos mapas conceituais, por meio dos processos cognitivos (diferenciação progressiva e reconciliação integradora), evidenciam que o texto de apoio pautado nas ADAVL's pode ser considerado um *material potencialmente significativo* no marco ausubeliano.

6. REFERÊNCIAS

André, M. E. D. A. (1998). *Etnografia da prática escolar*. 2. ed. São Paulo: Papirus editora.

Ausubel, D. (2002). *Adquisición y del conocimiento una perspectiva cognitiva*. Barcelona: Paidós.

Ausubel, D. P. (1963). *The Psychology of meaningful verbal learning*. New York: Grune and Stratton.

Ausubel, D. P. Novak, J. D., Hanesian, H. (1980). *Psicologia educacional*. Tradução Eva Nick. Rio de Janeiro: Interamericana.

Balacheff, N., & Kaput,J. J. (1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics. In: Bishop, A., Clements, M. A. K., Keitel-Kreidt, C., Kilpatrick, J., & Laborde, C. (eds.) International Handbook in Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic publisher. (pp. 469-501).

Barnard, P., May, J., Duke, D., & Duce, D. (2000). Sistemas, interações e macro teoria. *ACM Transactions on Computer-Human Interaction (TOCHI)*, *7*(2), 222-262. https://doi.org/10.1145/353485.353490.

Baulac Y., Bellemain F., & Laborde J.M., (1988), *Cabri-Géomètre, un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie*, logiciel et manuel d'utilisation, version 1.0, Macintosh de Apple, Nathan-Logiciels, Paris.

Bellemain, F. (1992). conception, realistion et experimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement lors de l'utilisation de l' ordinateur. *Educational Studies in Mthematics*. Amsterdam: Kluwer Academic Publishers. (pp. 59-97).

Bianchini, E., & Paccola, H. (2003). *Curso de matemática: volume único*. 3. ed. São Paulo: Moderna.

Caraça, B. J. (2000). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Coxford, A. F., Shult, A. P. (2001) As idéias da álgebra. São Paulo: Atual.

Duarte, N. (2005). O significado e o sentido. *Viver Mente & cérebro*, 2(2), 30-37. (Coleção Memória da Pedagogia).

García, M., Gavilán, J-M., & Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. De la perspectiva del profesor a la práctica. *Enseñanza de las ciencias*, 30(3), 219-235.

Gomes, A. S. (2008). Referencial Teórico Construtivista para Avaliação de Software Educativo. *Revista Brasileira de Informática na Educação*, 16(2), 9-21.

Gravemeijer, K. (1997). Solving word problems: A case of modelling? *Learning and Instruction*, 7(4), 389-397. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(97)00011-X.

Henriques, A. (2000). Papel e lápis X Cabri-Géomètre II: O caso do teorema de superfícies lunares. *Educação Matemática em Revista/SBEM*, 7 (8), 62-67.

Hinostroza, J. E., & Mellar, H. (2001). Pedagogy embedded in educational software design: report of a case study. *Computers & Education*. 37(2), 7–40.

Laborde C., & Capponi B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1-2), 165-210.

Leontiev, A. (1978). *O Desenvolvimento do Psiquismo*. Lisboa: Livros Horizonte.

Lévy, P. (2001). *As Tecnologias da Inteligência: O Futuro do Pensamento na Era da Informática*. 10ª Reimpressão São Paulo: Editora 34.

Lima, E, Carvalho, P., Wagner, E., & Morgado, A. (1998). *A Matemática do Ensino Médio*. Volume 1, Rio de Janeiro, Coleção do Professor de Matemática/SBM.

Lins, R.C., & Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*, São Paulo: Papirus.

Moreira, M. A., Masini, E. A. F. S. (2011). *Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel*. São Paulo, SP: Centauro.

Niss, M. (2010). O projeto dinamarquês KOM e suas relações com a formação de professores. In M. C. Borba (Ed.). *Tendências internacionais em formação de professores de matemática*. (2th ed., pp. 27-44). Autêntica Editora.

Novak, J. D., & Gowing, D. B. (1984). *Learning how to learning*. Cambridge: Cambridge University Press.

Petitat, A. (1994). *Produção da escola, produção da sociedade: análise sócio-histórica de alguns momentos decisivos da evolução escolar no ocidente*. Porto Alegre: Artmed.

Racelli, J., Denardi, V. B, & Bulegon, A. M. (2016). Uma Revisão de Literatura sobre Estudos Relativos ao Uso de Tecnologias Computacionais no Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. *Disciplinarum Scientia*, 17(2), 303-318.

Ríbinikov, K. (1991). *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Librería Rubiños.

Ronan, C. (2001). *História Ilustrada da Ciência da Universidade de Cambridge*. v. 1. Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

Szendrei, J. (1996). Concrete materials in the classroom. In A. J. Bishop et al. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education*. (pp. 411- 468). Kluwer.

Shneiderman, B., & Plaisant, C. (2005). *Designing the user interface: strategies for effective human-computer interaction (4 ed.)*: Pearson Education, Inc.

SILVA, J. R. (2009). *Textos de apoyo como organizadores previos para la enseñanza de Álgebra, Combinatoria, Lógica Matemática y Geometría Euclidiana.* Tese (Doutorado em Enseñanza de las Ciencias). Universidade de Burgos, UBU, Espanha.

Szendrei, J. (1996). Concrete materials in the classroom. In: Bishop, A. J. et al (eds). *International Handbook of Mathematics Education.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers (pp. 411- 434).

Usiskin, Z. (1995). Concepções sobre a Álgebra da escola média e utilização das variáveis. In A. F. Coxford; A. P. Shulte. (Org.). *As idéias da Álgebra*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual (pp. 9-22).

Valente, J. (1999). *Análise dos diferentes tipos de Software Usados na educação*. In J. A. Valente (Org.). *O Computador na Sociedade do Conhecimento. Campinas,* NIED – UNICAMP (pp. 89 -110).

Vergnaud, Gérard. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathémattiques*, 10 (23), 133-170.

Wagner, E., & Carneiro, J., J. P. Q. (2007). *Construções Geométricas*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM. (Coleção do Professor de Matemática).