REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS

Año 1 – Número 2 – Diciembre de 2006

Organizaciones Matemáticas que se estudian en la Universidad en torno a la noción de Función: un estudio de caso

Parra Verónica[1]; Otero, Maria Rita [1,2]; Elichiribehety, Ines[1]
[1]Nucleo de Investigación en Enseñanza de las Ciencias y la Tecnología
Departamento de Formación Docente. Facultad de Ciencias Exactas. UNICEN. Argentina
[2]CONICET- Argentina
vparra@exa.unicen.edu.ar ; rotero@exa.unicen.edu.ar;
ielichi@exa.unicen.edu.ar

Resumen

Este trabajo es parte de un proyecto que analiza la enseñanza de la Matemática en el nivel Universitario. Se trata de un estudio de caso realizado en la disciplina Análisis Matemático y sus Aplicaciones en el campo de la Economía.

Se utiliza la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1992, 1997,1999) para analizar y caracterizar las Organizaciones Matemáticas (OM) que conviven en esta Institución y las Organizaciones Didácticas (OD) desarrolladas por los profesores durante el estudio de esas OM. Durante un período prolongado se realiza observación no participante en dos grupos de clase. Las sesiones consideradas en esta ocasión, son las referidas a "Función". Se describen las OM relativas a Función analizando continuidades y rupturas entre los componentes y su consolidación en la etapa de evaluación. También se caracterizan las OD vinculadas con las OM en cuestión.

Summary

This work analyses Mathematics teaching at University level. A case study on the Maths Analysis discipline and its Applications in the field of Economy was carried out.

Anthropological Theory of Didactics (ATD) (Chevallard, 1992, 1997, 1999) is used for analyzing and characterizing Mathematical Organizations (MO) which coexist in this Institution and the Didactic Organizations (DO) developed by Professor during the study of those MO. No participatory observation has been carried out for a long period of time in two class groups. The sessions considered on this occasion are the ones referred to Functions. The MO related to a Function are described analyzing continuities and breaks between its components and its consolidation in the evaluation stage. Didactic Organizations (DO) related to Mathematical Organizations (MO) in question are also characterised.

Palabras Clave: Universidad, Función, Organización Matemática, Organización Didáctica, Teoría Antropológica de lo Didáctico.

1 Introducción

Estudiar Matemática genera dificultades tanto para los estudiantes de la Escuela Media como también para los de la Universidad. En esta última, tanto para las carreras cuyo objeto de estudio es la Matemática Pura como la Matemática Aplicada. En ambos casos se han detectado altos niveles de fracaso y deserción de los estudiantes, sobre todo en los primeros años de transito por el Sistema Universitario. Por lo tanto, resulta de interés analizar las características que reviste el estudio de la Matemática en esos años. En este trabajo, se considera el área de la Economía, donde se estudian diversos modelos que son interpretaciones económicas de sistemas axiomáticos propios de la Matemática.

La TAD es un referencial adecuado para describir y analizar cuestiones complejas referidas al estudio de la matemática. Esta teoría sitúa la actividad matemática en el conjunto de las actividades humanas y de instituciones sociales. Nos proponemos caracterizar las OM y las OD desarrolladas por los profesores de la Institución bajo análisis. Intentaremos identificar en qué medida, las praxeologías Matemáticas y Didácticas se corresponden y complementan. Para ello, identificaremos los componentes de cada una de las OM que conviven en esa Institución y de las OD desarrolladas por los Profesores.

En trabajos anteriores (Parra et. al; 2005) identificamos en esta Institución las siguientes Organizaciones Matemáticas:

1) Una Organización Matemática de Referencia (OMR)

2) Dos Organizaciones Matemáticas Propuestas para Enseñar (OMPE):
i) una propuesta por el programa analítico ($OMPE_1$)
ii) y otra propuesta por el material teórico que se ofrece a los estudiantes ($OMPE_2$)

3) Dos Organizaciones Matemáticas Efectivamente Enseñadas (OMEE), una por cada Profesor a cargo de los grupos de estudio:
i) La Organización Matemática Efectivamente Enseñada por el Profesor A ($OMEE_A$)
ii) Y la Organización Matemática Efectivamente Enseñada por el Profesor B ($OMEE_B$)

Del análisis de la OMR, la $OMPE_2$ y la $OMEE_A$ concluimos que existe un bloque tecnológico-teórico formado sólo por un conjunto de definiciones. En estas tres OM predomina el bloque práctico-técnico. En él se proponen constantemente duplas formadas por tareas y técnicas: no hay tareas sin la respectiva técnica de resolución. Éstas OM comparten la mayoría de los géneros de tareas.

También en trabajos anteriores (Cano V et. al; 2005) hemos caracterizado la Organización Didáctica (OD_A) desarrollada por el Profesor A. Se organizaron las clases en episodios, identificando en cada caso los conceptos matemáticos involucrados, los momentos de estudio predominantes, el tipo de lenguaje empleado por el docente y las formas de validación utilizadas.

En esta OD existe un predominio del momento de trabajo de la técnica, llevado a cabo en su totalidad por el profesor. La evaluación resulta instalada por el profesor y los alumnos en su discurso, haciendo permanente referencia a qué objetos matemáticos serán evaluados. Como consecuencia del protagonismo del profesor durante las clases, se observa una ausencia de tareas cooperativas entre él y los alumnos, lo cuál vacía el topos del alumno durante las clases.

Partiendo de las mismas categorías de análisis utilizadas para la caracterización de la OD_A hemos descrito la Organización Didáctica (OD_B) desarrolla por el Profesor B. En ella se detectaron tres momentos predominantes: el momento del primer encuentro; el momento del trabajo de la técnica y el momento de la institucionalización.

Coincidentemente con los resultados mencionados, el momento del trabajo de la técnica durante las clases está a cargo del profesor sin participación del alumno. La forma en la que se lleva a cabo el primer encuentro consiste en la institucionalización de la definición de las nociones. Es decir que ambos momentos se presentan siempre juntos. El lugar del alumno se ve reducido por la forma en que ocurre el momento del primer encuentro y por su nula participación en clase.

En este trabajo intentaremos identificar en qué medida las praxeologías Matemáticas y Didácticas se corresponden y complementan analizando conexiones y desconexiones entre la OMR, la $OMPE_2$, la $OMEE_A$ y $OMEE_B$. Además, nos proponemos mostrar cómo la etapa de evaluación consolida sólo aspectos puntuales de cada una de estas OM corroborando el fenómeno del autismo temático también en caso del profesor universitario. Por otra parte queremos evidenciar la incidencia sobre las OD de las continuidades y rupturas que se producen en las OM.

2 La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

La TAD asume que el saber matemático se construye como respuesta a situaciones problemáticas y surge como el producto de un proceso de estudio. Esta teoría supone que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se resume con la palabra praxeología. El término praxis hace referencia al saber hacer, es decir, los tipos de problemas o tareas que se estudian y las técnicas que se construyen para solucionarlos. El término logos, se identifica con el saber e incluye las descripciones y explicaciones que nos permiten entender las técnicas, esto es, el discurso tecnológico y la teoría que da sentido a los problemas planteados. Tipos de tareas, técnica, tecnología y teoría son los elementos que componen una praxeología. (Bosch et. al.; 2003)

2.1. Las Organizaciones Matemáticas y las Organizaciones Didácticas

Esta teoría distingue dos tipos de praxeologías u organización praxeológica: las Organizaciones Matemáticas (OM) y las organizaciones Didácticas (OD). Las primeras se refieren a la realidad matemática que se pretende estudiar y las segundas, a la forma en que eso ocurre. Ambas praxeologías, Matemáticas y Didácticas, tienen como componentes un bloque práctico-técnico, formado por tareas y técnicas, y un bloque tecnológico-teórico, formado por tecnologías y teorías.

En la reconstrucción de una OM hay ciertas situaciones didácticas que están necesariamente presentes. Chevallard denomina a estos tipos de situaciones, momentos de estudio o momentos didácticos porque se cual sea el camino seguido, se llega forzosamente a un momento donde tal o cual “gesto del estudio” deberá ser cumplido. Los momentos didácticos articulados en el proceso de estudio son: el momento del primer encuentro con la organización que está en juego; el de la exploración del tipo de tareas y el de la elaboración de una técnica relativa a este tipo de tareas; el de la constitución del entorno tecnológico-teórico relativo a la técnica; el del trabajo de la técnica; el momento de la institucionalización y el momento de la evaluación. (Chevallard; 1999)

2.1.1. La Organización Matemática de Referencia (OMR) en torno a la noción de Función

La OMR identificada en esta Institución fue reconstruida a partir del material bibliográfico citado en el Programa Analítico del curso “Análisis Matemático y sus Aplicaciones”. Caracterizamos esta OM a través de los componentes del bloque práctico-técnico y tecnológico-teórico.

La OMR gira en torno a los siguientes géneros de tareas:

***O_1**: Analizar el dominio de funciones.*
***O_2**: Analizar que expresiones resultan ser relación funcional.*
***O_3**: Representar gráficamente funciones de una y dos variables.*
***O_4**: Analizar casos particulares de curvas de nivel.*

El bloque tecnológico-teórico está conformado sólo por una serie de definiciones, las cuales son completas y precisas y se relacionan en gran medida entre sí y con las tareas y técnicas propuestas.

2.1.2. La Organización Matemática Propuesta para Enseñar (OMPE) en torno a la noción de función

En la OMPE, hemos detectado una desconexión interna que hace necesaria la distinción entre una OM propuesta por el programa analítico ($OMPE_1$) y una OM propuesta por el apunte teórico ($OMPE_2$).

La $OMPE_2$, gira en torno a cinco géneros de tareas:

***G_1**: Analizar el dominio de funciones.*
***G_2**: Operar con funciones.*
***G_3**:.Caracterizar funciones.*
***G_4**: Representar gráficamente funciones.*
***G_5**: Analizar curvas de nivel.*

El bloque tecnológico teórico está conformado sólo por definiciones.

2.1.3. La Organización Matemática Efectivamente Enseñada por el Profesor A ($OMEE_A$)

La $OMEE_A$ gira en torno a cuatro géneros de tareas:

***H_1**: Analizar el dominio de funciones.*
***H_2**: Componer funciones lineales y cuadráticas.*
***H_3**: Representar gráficamente funciones*
***H_4**: Hallar curvas de nivel.*
***H_5**: Evaluar funciones en puntos del dominio.*
***H_6**: Caracterizar funciones.*

El bloque práctico-técnico está conformado por un gran número de pares de tareas-técnicas, desarrolladas en su totalidad por el docente. El bloque tecnológico-teórico posee un abundante número de definiciones.

2.1.4. La Organización Matemática Efectivamente Enseñada por el Profesor B ($OMEE_B$)

Los géneros de tareas en torno a los cuales gira la $OMEE_B$ son los siguientes:

***F_1**: Analizar funciones de una variable.*
***F_2**: Evaluar funciones en puntos del dominio.*
***F_3**: Analizar el domino de funciones.*
***F_4**: Caracterizar funciones de una variable independiente.*
***F_5**: Componer funciones lineales y cuadráticas.*

El bloque práctico-técnico está formado por algunos pares de tareas y técnicas que son llevadas a cabo y propuestas por el docente, siendo casi nula la intervención del alumno en la clase. El docente propone las técnicas de resolución sin dejar a los alumnos la posibilidad de buscar una técnica o perfeccionar alguna anterior.

Identificamos un bloque tecnológico-teórico formado por un abundante número de definiciones. Definiciones que en la mayoría de los casos son formuladas en un lenguaje cotidiano y esta es la manera en la que se da el momento del primer encuentro con las nociones referidas a “Función”.

3 Preguntas de la Investigación.

a) Las definiciones que componen el bloque tecnológico-teórico ¿son dinámicas o estáticas?

b) En la etapa de evaluación ¿qué aspectos puntuales se consolidan?

c) ¿Cuál es la incidencia de las continuidades y rupturas presentes en las OM sobre las OD?

4 Metodología de investigación

Esta investigación se realizó en una disciplina de una carrera referida a la Economía en el nivel universitario. Se observó durante un cuatrimestre el proceso de estudio de dos grupos de alumnos. Cada uno de éstos estaba constituido por aproximadamente 40 alumnos y a cargo de un Profesor con amplia trayectoria docente: Profesor A y Profesor B.

Se realizaron observaciones de carácter no participante recopilando los datos en video, audio y registros escritos, así como también las evaluaciones y los resultados obtenidos por los estudiantes y sus carpetas de trabajo. Además se analizan los materiales teóricos y prácticos que se ofrecen a los estudiantes, el programa analítico con los contenidos por unidad, y la bibliografía recomendada a los alumnos, que son comunes a los dos grupos de estudio. Los encuentros de clases se realizaban en dos sesiones semanales de tres horas cada una. De la totalidad de las sesiones observadas, en este trabajo se consideran las cuatro relativas al estudio de "Funciones de una y varias variables".

La Tabla 1 permite agrupar las definiciones de "Función" y de "Función de dos variables reales" que se proponen en cada una de las OM. Las columnas corresponden a la $OMEE_A$ y $OMEE_B$, la $OMPE_2$ y la OMR, respectivamente.

Definiciones en cada OM			
$OMEE_A$	**$OMEE_B$**	**$OMPE_2$**	**OMR**

Tabla 1

La Tabla 2 sintetiza información acerca de la cantidad de tareas que se proponen en cada uno de los géneros de las OMEE ($OMEE_A$ y $OMEE_B$) y de la $OMPE_2$ .Intentaremos relacionar el número de tareas trabajadas durante las sesiones de clases con las efectivamente propuestas en exámenes.

OM / **Géneros de Tareas**	**$OMEE_A$**	**$OMEE_B$**	**$OMPE_2$**
Género (1)			
Género (2)			
Género (3)			
Género (4)			
Género (5)			
Género (6)			
Género (7)			

Tabla 2

La Tabla 3 permite caracterizar la OD desarrollada por cada uno de los profesores (OD_A y OD_B) a través de las Organizaciones Matemática Efectivamente Enseñada ($OMEE_A$ y $OMEE_B$, respectivamente).

Nociones Matemáticas Presentes	**Géneros de tareas(G_i)**	**Tipos de tareas (T_{ij})**	**Momento predominante**	**Lenguaje**	**Forma de validación**	**Técnica (τ_{ijk})**

Tabla 3

La primera columna de la Tabla 3 informa sobre las nociones que se explicitan en cada una de las Organizaciones Matemáticas Efectivamente Enseñadas. La segunda nos permite identificar qué géneros de tareas se construyen en torno a esas nociones. En la siguiente columna, detallamos los tipos de tareas que conforman dichos géneros. La cuarta nos informa acerca de los momentos del estudio que predominan. La quinta columna se refiere al **tipo de lenguaje** utilizado por el Profesor en los diferentes episodios de clase. La columna siguiente nos informa respecto de las **formas de validación** a las que recurren los Profesores. Finalmente, identificamos las técnicas que se construyen en torno a los diferentes tipos de tareas de cada uno de los géneros.

Los diferentes tipos de lenguajes (Columna 6) y las diferentes formas de validación (Columna 7) que hemos considerado en este caso son los siguientes:

Numérico: Relativo al manejo de números, por ejemplo: cuentas.
Gráfico: Relativo a cualquier tipo de gráfico matemático, ya sea a través de lápiz y papel o con el uso de algún software.
Algebraico: Referido a cualquier tipo de generalización a partir de símbolos matemáticos.
Verbal: Referido al lenguaje oral y escrito.

Las formas de validación son:

Deductiva: Validar el saber mediante una demostración deductiva.
Visual-Ostensiva: En este caso, se refiere a la presentación de las nociones matemáticas sin justificación.
Inducción-Empírica: Relativo a generalizar a través de ejemplos.

La Tabla 4 y la Tabla 5 permiten un análisis más detallado de los tipos de lenguajes y de las formas de validación detectadas en la OD_A y en la OD_B. Transcribimos en la primera columna, los géneros de tareas de cada OMEE ($OMEE_A$ y $OMEE_B$) y, en las columnas siguientes, se registra el número de apariciones de cada tipo de lenguaje, para el caso de la Tabla 4 y el número de apariciones de las tres formas de validación, en la Tabla 5.

Lenguaje / Género de tareas de la OMEE	Verbal	Gráfico	Algebraico	Numérico

Tabla 4

Formas de Validación / Géneros de tareas de la OMEE	Deductiva	Visual-Ostensiva	Inducción-Empírica

Tabla 5

5 Análisis de datos

5.1. Tipos de definiciones en la OMEE$_A$, la OMEE$_B$, la OMPE$_2$ y la OMR.

La forma en la que se producen los encuentros con el saber es casi exclusivamente a partir de definiciones. Por esto, hemos analizado en detalle las características que éstas asumen, centrando el análisis en las definiciones de “Función” y “Función de dos variables reales” propuestas en cada una de las OM.

Un aspecto relevante es considerar si las definiciones de “Función” que se adoptan son estáticas o dinámicas. Diremos que una definición de función es estática cuando no se proporciona ninguna regla de asignación o fórmula que permita hallar la segunda componente del par a partir de la primera. Alternativamente, en las definiciones dinámicas de “Función” se ofrecen reglas, fórmulas o mecanismos que suelen mostrar relaciones causales entre las variables, especialmente en el caso en que las componentes del par sean numéricas. Suele decirse que este tipo de definiciones son más apropiadas cuando se quiere enfatizar la relación de dependencia entre las variables en funciones de dominio real. Tales funciones se presentan en modelos propios del campo de la Economía, Física, Biología, etc.

La Tabla 3 se construyó con el objetivo de comparar las definiciones propuestas en cada una de las OM respecto al concepto “Función” y “Función de dos variables reales”.

Definiciones en cada OM			
OMEE$_A$	**OMEE$_B$**	**OMPE$_2$**	**OMR**
$f: A \to B$ es función si a cada elemento de A le correspon de uno y solo uno de B.	*Es una ley que vincula dos conjuntos dados, X e Y de tal menara que a cada elemento del conjunto X le corresponde*	*Dados dos conjuntos A y B, llamaremos función de A en B a una ley que a cada elemento de A hago corresponder uno y sólo un elemento de B. Notaremos $f: A \to B$ que se lee “f de A en*	*Decimos que $f: A \to B$ es una función de A en B, si se tiene una ley o regla que asigna a cada uno de los elementos del conjunto A un elemento del conjunto B, que se llama la imagen de ese elemento. La imagen de un elemento es única. Al conjunto A le llamamos dominio de la función e indicamos Df = A. El conjunto de las imágenes por f de los*

(Episodio 1)	*uno y sólo uno de los elementos del conjunto Y.* (Episodio 1)	*B".* *Al conjunto de valores de "y" tal que y=f(a) con* $a \in A$, *lo llamaremos* <u>*imagen*</u> *de la función.* *Im f =* $\{y \in B : \exists a \in A, f(a) =$ (Apunte Teórico, pág. 35)	*elementos de A que indicamos If está incluido en el conjunto B; es decir se cumple: If* $\subset$ *B (en sentido amplio, es decir puede ser If = B).* *Al conjunto B le llamamos conjunto de llegada.* (Bianco-Carrizo, pág. 20)
f: $R^2 \rightarrow R$, z = f(x, y). Doy mi "x", mi "y" y obtengo un solo valor de z. (Episodio 15)	f: $R^2 \rightarrow R$, esto me dice que a los pares ordenados (a, b) le corresponde c, siendo que (a, b) $\in R^2$ y los dos reales (a, b) $\rightarrow$ c, z = f(x, y). (Episodio 5)	La correspondencia f de *un subconjunto A de R x R =* R^2 *en el conjunto R dado por f: A* $\subseteq$ $R^2 \rightarrow R$ *y tal que* $\forall$ *(x, y)* $\in A, \exists z = f(x,y) \in R,$ *se denomina función real de dos variables reales.* (Apunte Teórico, pág. 39)	*Si dado un conjunto de partida A, la función F le asigna a cada par ordenado de números reales pertenecientes al mismo, un único elemento de otro conjunto de llegada B, se dice que F es una función o campo escalar de dos variables. Es decir: dada F: A* $\rightarrow$ *B / A* $\subseteq$ *R2 es una función o campo escalar de dos variables si el Dom.F = A (condición de existencia) y la imagen correspondiente a cada elemento es única (condición de unicidad).* (Di Caro- Gallego, pág. 32)

Tabla 1

Las definiciones de "Función" y de "Función de dos variables" son **dinámicas**. Tanto en la $OMEE_A$ como en la $OMEE_B$, apreciamos el estilo coloquial de la definición de "Función de dos variables reales", estilo que conduce a imprecisiones y apreciamos el énfasis puesto por ambos profesores para destacar la relación de dependencia. Aunque todas tengan en común un marcado carácter dinámico, las definiciones presentes en la $OMPE_2$ y en las OMEE se alejan progresivamente de las propuestas en la OMR en términos de precisiones y del lenguaje matemático.

5.2. Análisis de la consolidación de la OM en la instancia de evaluación

La instancia de evaluación puede entenderse como un momento más de institucionalización (Bodín; 1997). Así, los géneros de las evaluaciones hablan acerca de qué aspectos de una noción se destacan y cuáles no. Por lo tanto, para determinar el estatus dado a la evaluación en esta Institución, debe rastrearse que géneros de tareas se priorizan en el desarrollo de una OM y cuáles son los efectivamente evaluados. A continuación, se representan los datos de la Tabla 2 para permitir una comparación entre la cantidad de tareas que se resuelven en la $OMPE_2$ y las OMEE ($OMEE_A$ y OME_B).

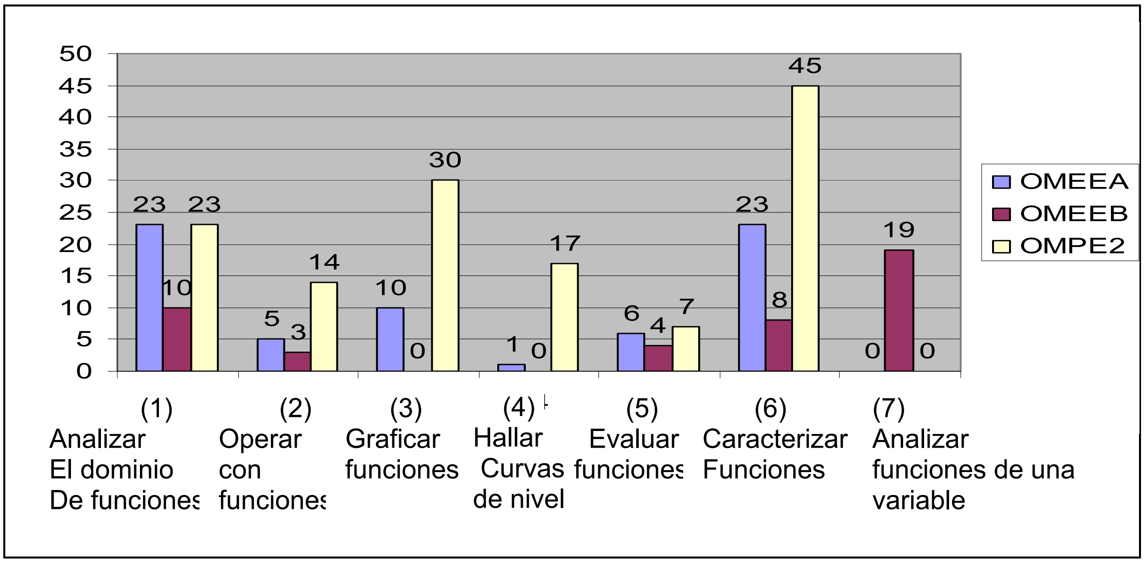


Gráfico 1

Las barras que se corresponden con los géneros de tareas de la $OMEE_A$, en la mayoría de los casos, tienden a alcanzar el nivel de las mismas en la $OMPE_2$.Mientras que en la $OMEE_B$ no se observa tal comportamiento. En este sentido, lo que efectivamente se enseña en la $OMEE_A$ parecería alcanzar lo que se propone para enseñar en la $OMPE_2$.

A continuación, presentamos tareas del examen relacionadas con los géneros de cada OM. Éstos nos informan acerca de la consistencia entre las tareas que se resuelven en clase y las que realmente se evalúan.

Hallar el dominio de la función indicada y señalarlo en el plano XoY:

$F(x, y) = \ln (1 + x y)$

$$G(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2 - 4}}$$

$$H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

$$M(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2 - 9}}$$

La prioridad o no que se otorga a ciertas tareas en una OMEE es un posible indicador de lo que puede ser evaluado. Bajo una misma $OMPE_2$ y ante un mismo examen, nos encontramos con dos realidades muy diferentes. Por un lado, en la $OMEE_A$, el docente brinda mayor importancia a ciertos tipos de tareas, y esto resultaría indirectamente para el alumno, un indicador de aquellas que posiblemente sean evaluadas. Por otro lado, en la $OMEE_B$, el docente no priorizan ciertas tareas respecto a otras, es decir, se mantienen todas en un mismo nivel de significancia. Así, el alumno, no advertiría posibles “pistas” de aquello que puede ser evaluado.

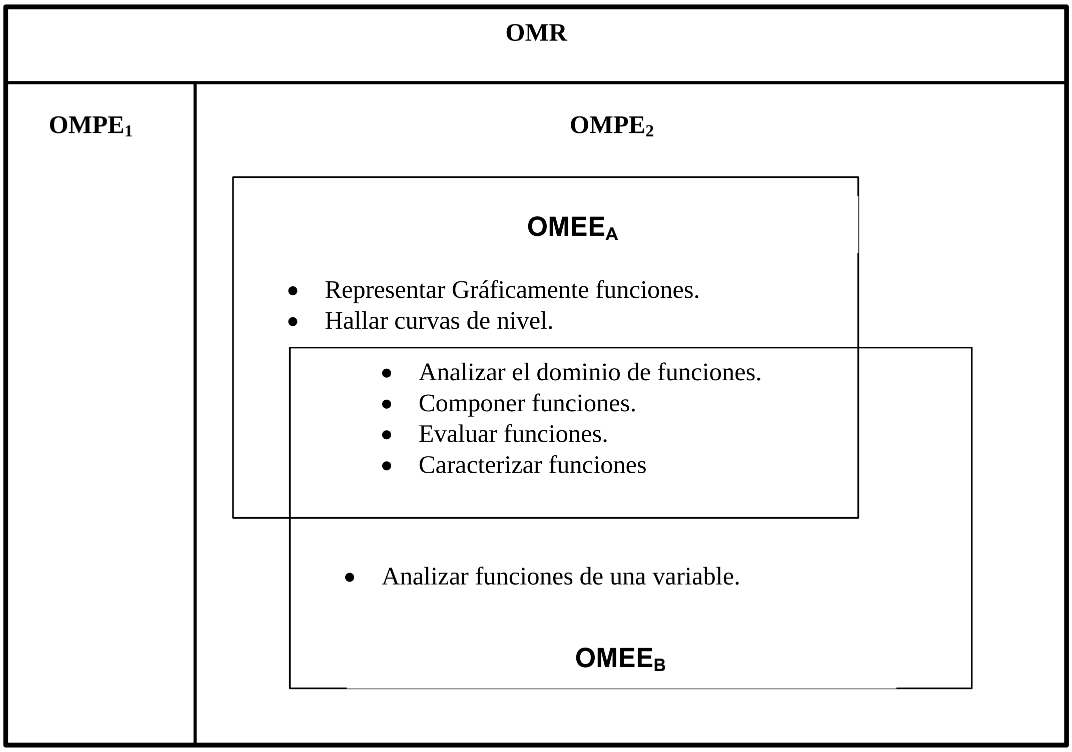
5.3. Conexiones y desconexiones entre la OMR, la $OMPE_2$, la $OMEE_A$ y $OMEE_B$

Una metodología para analizar las continuidades y rupturas entre las OM es determinar qué componentes comparten y cuáles no, cada uno de los bloques que componen las organizaciones analizadas. Es decir, identificar que tipos de tareas y técnicas son comunes a los bloques práctico-técnico de las diferentes OM; y qué tecnologías y teorías son comunes en los bloques tecnológicos-teórico. Estos componentes pueden señalar la existencia de ciertas rupturas y continuidades entre las OM.

Respecto al bloque práctico-técnico centraremos el análisis en los Géneros de tareas que componen cada una de las OM estudiadas. El Esquema 1 nos muestra que géneros de tareas comparten los bloques de cada una de estas OM.

Como se ha mencionado anteriormente, bajo una misma Organización Matemática de Referencia existen dos Organizaciones Matemáticas Propuestas para Enseñar: una propuesta por el programa analítico, a la cuál no se recurre en ninguna oportunidad por ninguno de los grupos de estudio; y la otra propuesta por los materiales teóricos. Además, bajo la dirección de una misma Organización Matemática Propuesta para Enseñar, hay dos Organizaciones Matemáticas Efectivamente Enseñadas: una por el Profesor A y otra por el profesor B.

Así, las continuidades y rupturas entre las OM analizadas se manifiestan en que, por un lado, tendríamos diferentes OMPE bajo una misma Organización Matemática de Referencia y diferentes OMEE bajo una misma Organización Matemática propuesta para Enseñar. Por otro lado, las OM comparten ciertos géneros de tareas.



Esquema 1

La Organización Didáctica del Profesor A y la Organización Didáctica del Profesor B (OD_A y OD_B)

Para el estudio de una OM es necesario desarrollar una OD, y no existe una OD sin una OM que reconstruir. Por lo tanto, se afirmar que toda OD contiene al menos una OM y que toda OM está contenida en, al menos, una OD. Por esto, nos cuestionamos si las continuidades y rupturas que posee una OM también inciden en las OD desarrolladas por los profesores.

Analizaremos entonces las características de la OD_A y la OD_B, identificando los momentos del estudio que predominan, los tipos de lenguaje y las formas de validación que priorizan cada uno de los Profesores.

5.4.1. Momentos predominantes en cada OD.

Resulta de interés analizar cuáles de los seis momentos de estudio que propone Chevallard (1999) predominan en el desarrollo de cada OMEE, es decir, que gestos del proceso de estudio son detectados con mayor frecuencia en cada OMEE. A continuación se explicitan las siglas utilizadas:

P. E: Corresponde al Momento del Primer Encuentro
I: Momento de Institucionalización
T. T (D): Momento del Trabajo de la Técnica llevada cabo por el Docente.
Los restantes momentos del estudio no tienen asignado un tópico pues no han sido detectados en el desarrollo de las OMEE.

La Tabla 4 muestra qué momentos predominan en el desarrollo de cada una de las OD.

OD / Géneros de tareas	**OD_A**	**OD_B**
(1) **Analizar el dominio de funciones**	P. E - I	P. E - T. T (D)
(2) **Operar con funciones**	T. T (D)	T. T (D) - I
(3) **Representar gráficamente funciones**	T. T (D)	Ausencia de este género.
(4) **Hallar curvas de nivel**	P. E - T. T (D) - I	Ausencia de este género.
(5) **Evaluar funciones en puntos del dominio**	P. E - T. T (D) - I	P. E - T. T (D)
(6) **Caracterizar funciones de una variable independiente**	T. T (D)	P. E - T. T (D) - I
(7) **Analizar funciones de una variable**	Ausencia de este género.	P. E - I

Tabla 4

En la OD_A predomina el momento de trabajo de la técnica, llevado a cabo en su totalidad por el profesor. Tanto éste como los alumnos, hacen permanente referencia a la instancia de evaluación, instalando en su discurso cuestiones referidas a lo puede o no ser evaluado.

Se advierte en la OD_B tres momentos predominantes: el momento del primer encuentro, desarrollado pura y exclusivamente a través de la definición de las nociones matemáticas involucradas en el tipo de tareas; el momento del trabajo de la técnica, llevado a cabo sólo por el profesor y el momento de la institucionalización. Observamos la ausencia de los momentos de la elaboración de una técnica, lo cuál parecería ser una consecuencia inmediata de la forma en la que se produce el momento del trabajo de la técnica.

En la $OMEE_B$, el Profesor y los alumnos no hacen referencia a qué tipos de tareas pueden ser evaluados y cuáles no.

5.4.2. Lenguaje utilizado por cada uno de los Profesores.

Los datos proporcionados por la Tabla 5 y la Tabla 6 están representados a continuación.

El Gráfico 2 nos permite analizar, de manera conjunta, los tipos de lenguajes utilizado por cada Profesor en cada uno de los géneros de tareas que compone la Organización Matemática Efectivamente Enseñada (OMEE).

En el mismo localizamos los géneros de tareas de la $OMEE_A$ y la $OMEE_B$ sobre el eje vertical y el número de apariciones de cada tipo de lenguaje sobre el eje horizontal. Al fin de cada barra se indica a qué Organización Didáctica hacemos referencia, si es a la OD del Profesor A (OD_A) ó a la OD del Profesor B (OD_B). Las barras grises significan que el género de tareas correspondiente está ausente en la OD indicada a la derecha. Los números que se muestran en cada sector de las barras indican el número de apariciones de ese tipo de lenguaje en el género de tareas.

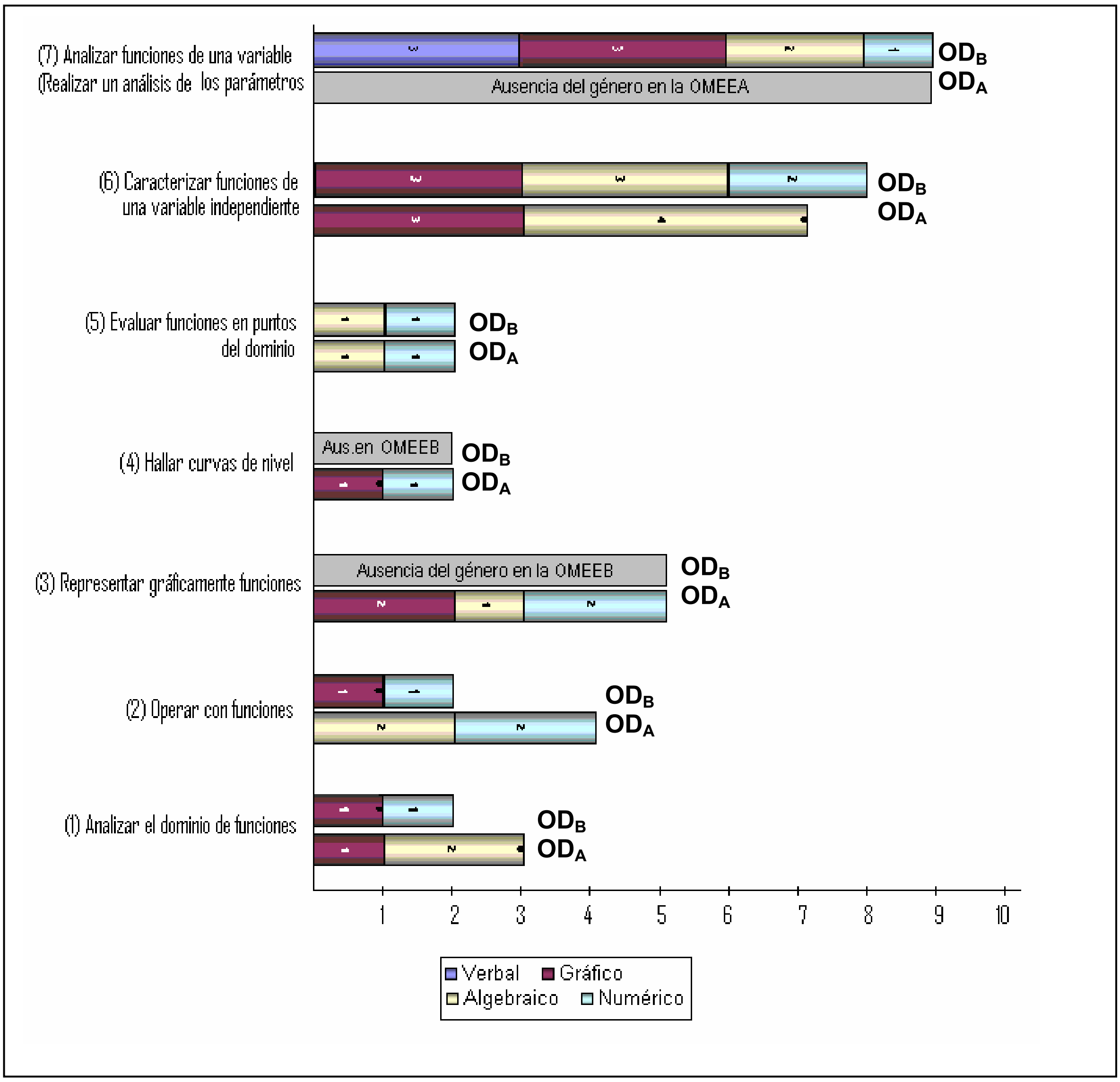


Gráfico 2

El lenguaje **verbal** es identificado únicamente en la OD_B en el género *Analizar funciones de una variable.*

El lenguaje **gráfico** es detectado en cuatro de los seis géneros de tareas de la OD_A: *Analizar el dominio de funciones, Representar gráficamente funciones, Hallar curvas de nivel* y *Caracterizar funciones.* En la OD_B, este tipo de lenguaje es utilizado en los géneros de tareas: *Analizar el dominio de funciones, Operar con funciones, Caracterizar funciones* y *Analizar funciones de una variable independiente.*

El lenguaje **algebraico** es identificado en todos los géneros de tareas de la OD_A, excepto en el caso de *Hallar curvas de nivel.* En la OD_B se observa el uso de este lenguaje en tres de los cinco géneros de tareas: *Analizar funciones de* *una variable; Caracterizar funciones de una variable* y, en menor medida, en el género *Evaluar funciones en puntos del dominio*.

El lenguaje **numérico** es utilizado por el Profesor A en los géneros de tareas, excepto en el caso de *Hallar curvas de nivel.*

El lenguaje **verbal** no se advierte en la OD_A mientras que en la OD_B, lo observamos sólo en el género *Analizar funciones de una variable.*

Cada profesor ha priorizado las diferentes formas de lenguaje de la siguiente manera:
El profesor A: Algebraico (10) –Gráfico (7) –Numérico (6).
El profesor B: Grafico (8)- Algebraico (6)/Numérico (6)- Verbal (3).

5.4.3 Formas de validación utilizada por cada Profesor.

Un análisis similar efectuamos respecto a las formas de validación utilizadas por cada Profesor. En este sentido, el Gráfico 3 nos permite analizar de manera conjunta cuáles de las formas de validación consideradas en este trabajo utilizan en mayor y menor medida cada uno de los Profesores. Localizamos en el mismo, los géneros de tareas de las OMEE ($OMEE_A$ y $OMEE_B$) sobre el eje vertical y el número de apariciones de cada forma de validación sobre el eje horizontal.

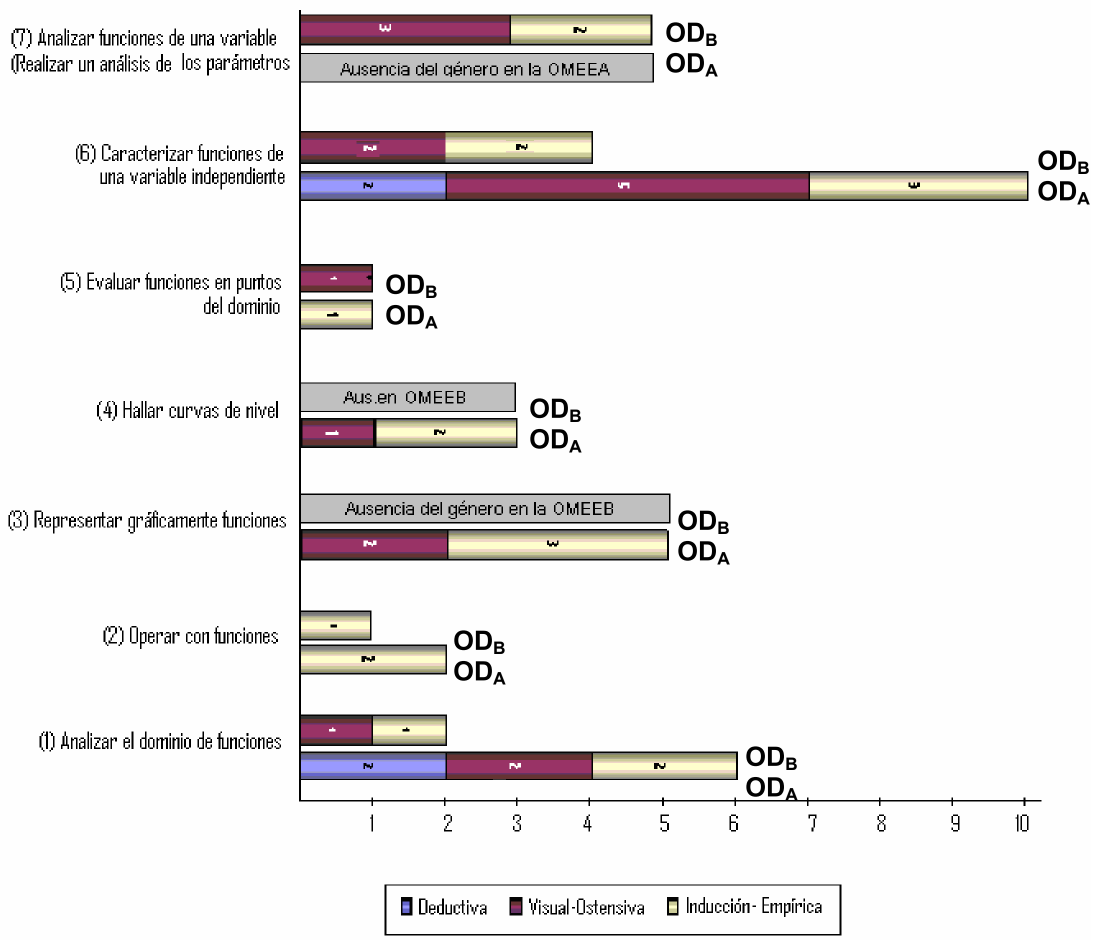


Gráfico 3

Cada profesor ha priorizado las diferentes formas de validación de la siguiente manera:
El profesor A: Inducción-Empírica (13) – Visual-Ostensiva (10) – Deductiva (4).
El profesor B: Visual-Ostensiva (7) – Inducción-Empírica (6) –Deductiva (0).

Las validaciones que usan la **deducción** se identifican solo en la OD_A en dos de los géneros de tareas: *Analizar el dominio de funciones* y *Caracterizar funciones de una variable independiente.* Validar usando la deducción es fundamental en matemática pues, el método deductivo es uno de los razonamientos lógicamente válidos. Esto significa que, un razonamiento deductivo nos asegura obtener, a partir de premisas verdaderas, una conclusión verdadera. En este sentido, éstos suponen ser los “ideales” para asegurar la verdad de ciertas proposiciones o resultados. Por esto, resultaría apropiado poder identificarlos en cualquier curso de Matemática, y más aún, en cursos propios de la Universidad. A pesar de estas consideraciones, en la Institución de análisis existen pocos usos de la “deducción” para demostrar ciertas conclusiones.

Proponemos dos posibles causas de este bajo número de ocurrencia de los razonamientos deductivos:

Causa 1: la subestimación que se tiene respecto del alumno. Es decir, suponer que el alumno no podrá alcanzar un nivel deductivo en las demostraciones y por lo tanto, no propiciar a que ello ocurra. Por consiguiente, las demostraciones se reducen a formas de validación de tipos inductivo-empíricas y visuales-ostensivas, que es lo que parecería ocurrir con ambos Profesores.

Causa 2: los profesores no consideran necesarias las demostraciones durante las sesiones de clase. En el material teórico se prueban algunas proposiciones y esto, podría justificar la ausencia de pruebas deductivas del Profesor junto a los alumnos. En caso de necesitar una demostración, se recurre a la lectura de los materiales teóricos.

Las demostraciones deductivas tienen que ver con lo que muchos autores denominan el Pensamiento Matemático Avanzado. Estos autores sostienen que el paso de la Escuela Media a la Universidad puede explicarse en términos de Pensamiento Matemático Elemental al Pensamiento Matemático Avanzado (Bosch, Fonseca, Gascón; 2004). Muchas de las actividades matemáticas que propician esta “transformación de pensamiento” se refieren a la posibilidad de llevar a cabo definiciones formales y demostraciones deductivas.

En nuestra Institución de análisis no se propicia a los alumnos a producir demostraciones con lo cuál no se alcanzaría ese cambio entre el pensamiento elemental y el avanzado.

Por otra parte, estos autores sostienen además que el paso de la escuela Media a la Universidad se identifica con una ruptura del contrato didáctico. Se refieren puntualmente a la “redesignación de roles” y al cambio en las tareas designadas en el proceso de estudio. En la Escuela Media, es el docente el que demuestra y existe un predominio del bloque práctico-técnico en las OM. En cambio, sostienen que en la Universidad el alumno también debe demostrar y que las tareas más desarrolladas son las de "aprendizaje de teorías". De esta manera, el bloque tecnológico-teórico es el que ocupa el lugar central en el nivel universitario.

Considerando la Institución de análisis, este fenómeno no ocurre. En este caso, las demostraciones siguen siendo llevadas a cabo por el Profesor y el bloque práctico-técnico es el predominante. El alumno no alcanza a realizar ninguna demostración sólo ni aún, con el Profesor. Por lo tanto, esta idea de ruptura del contrato didáctico no se refleja en nuestra Institución de análisis.

6 Conclusiones

Respecto a los componentes del bloque tecnológico-teórico de las OM que conviven en la Institución bajo análisis, advertimos que está formado por un gran número de definiciones, lo que nos conduce a la conclusión que ésa es la única forma en la cuál se da el momento del primer encuentro con las nociones a estudiar. Esto implica una naturalización del saber: las nociones referidas a "Función" se proponen al alumno para ser "aprendidas", sin cuestionamiento alguno.

Con relación a sí las definiciones son dinámicas o estáticas, aseguramos que las relativas a "Función" y "Función de dos variables reales" se ajustan al tipo de definiciones de carácter dinámico. Condición que podría ser aprovechada pues el curso de Análisis Matemático corresponde al área de la Economía. En este sentido, un abundante número de situaciones relacionadas a dicho campo podrían servir de ejemplo sobre modelizaciones a través de relaciones entre variables.

Una diferencia fundamental entre la Organización Matemática Propuesta para Enseñar (OMPE), la Organización Matemática de Referencia (OMR) y las OMEE es la progresiva pérdida de lenguaje matemático en la formulación de las definiciones. Las propuestas en las OMEE adoptan un lenguaje cotidiano, impidiendo al alumno distinguir entre lo que se define de lo que se habla. En cambio, en la OMR, se formulan en lenguaje matemático. Y aquí se identifica una importante ruptura entre la OMR y las OMEE.

A pesar de que exista cierta pérdida de rigor matemático en las definiciones, debe remarcarse que la OMR, las OMEE y la OMPE comparten la mayoría de los géneros de tareas. Si bien se priorizan diferentes tipos de tareas, hay géneros que son comunes en las cuatro OM analizadas.

Respecto a la etapa de evaluación conviene aclarar una importante diferencia entre la Escuela Media y la Universidad. En la primera, los alumnos alcanzan el éxito por diversos factores. Por ejemplo, el docente tiene en cuenta la participación y trabajo en clase, la conducta, la asistencia y obviamente, la evaluación escrita, entre otros. En la Universidad, en cambio, no son tantos los factores que inciden en el éxito de los estudiantes.

Debido a la gran cantidad de alumnos que concurren a una clase de la Universidad (a veces una tres o cuatro veces más que en un curso de escuela media) resulta difícil al docente considerar factores como los mencionados anteriormente. Y es aquí donde examen adquiere total responsabilidad para decidir entre el éxito y el fracaso de los alumnos (Entendiendo "éxito" según el resultado del examen: "éxito" sería "el aprobado") Por esto, es de fundamental importancia analizar el momento de evaluación en la Universidad, que se da pura y exclusivamente a través del examen.

Este momento está fuertemente condicionado por lo que el alumno pueda identificar como relevante durante las sesiones de clase. Los estudiantes pueden advertir ciertas "pistas" de lo que puede ser evaluado a partir de la prioridad dada por el Docente a ciertos tipos de tareas.

Respecto a esto, en las OMEE existen dos realidades diferentes: mientras en una OM se dan pistas de las factibles tareas a ser evaluadas, en la otra no existen tales indicadores. Lo primero es una consecuencia inmediata de otorgarle mayor importancia, durante las clases, a tareas similares a las efectivamente evaluadas. Lo segundo, producto del mismo nivel de significancia dado por el Profesor a todos los tipos de tareas.

Relacionado con la incidencia de las OM sobre las OD, aseguramos que las continuidades y rupturas que se producen en las primeras operan fuertemente en el desarrollo de las OD de cada Profesor. Por un lado y a modo de ejemplo se tiene la pérdida de lenguaje matemático existente en las definiciones. Éstas, en las OM analizadas, ocupan un lugar muy importante pues es la forma en la cuál se produce el momento del primer encuentro con las nociones a estudiar. Por lo tanto, si no hay rigor matemático en una definición, entonces, no puede existir rigor en, por ejemplo, las validaciones desarrolladas durante las sesiones de clase.

Por otro lado, encontramos ciertas similitudes entre las OM: el bloque práctico técnico está formado por tareas y técnicas matemáticas, que son resueltas y propuestas exclusivamente por el docente. Esto le otorga al alumno el papel de "oyente" durante las clases vaciando fuertemente el topos.

Finalmente, nos referimos al paso de la Escuela Media a la Universidad en términos de Pensamiento Matemático Elemental al Pensamiento Matemático Avanzado y en términos de cambios en el contrato didáctico (Bosch et. al; 2004). Aseguramos que en la Institución de análisis estos fenómenos no ocurren tal y como los describe Bosch (2004). Respecto al primero, concluimos que no se alcanza por parte de los alumnos el Pensamiento Matemático Avanzado. Bosch sostiene que para que ello ocurra es necesario llevar a cabo tareas del nivel teórico que incluyan definiciones formales y demostraciones deductivas, tareas que tal y como se ha mencionado anteriormente, no son detectadas en esta Institución.

Relacionado al segundo fenómeno, advertimos que se mantiene el contrato didáctico de la Escuela Media: el Profesor es el que demuestra y no se priorizan tareas de tipo tecnológicas-teóricas, sino que hay predominio del bloque tecnológico-teórico.

7 Referencias

Bodin, A. (1997) L'évaluation du savoir mathématique, questions et méthodes. *Recherches en Didactique des Mathématiques 17 (1)*, 49-95.

Bosch, Espinoza, Gascón (2003) El profesor como director de procesos de estudio. Análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques 23 (1),* 79 -135.

Bosch, Fonseca, Gascón (2004) Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las Instituciones Escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 24 (2),* 205-250.

Chevallard, Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12 (1),* 73-112.

Chevallard, Y. (1997) Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques. 17 (3),* 17-54.

Chevallard, Y. (1999) L´analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19 (2),* 221-266.

Cano, V; Parra, V.; Otero, M. R; Elichiribehety, I. (2005) Praxeologías didácticas en el nivel universitario en torno a la noción de Función: un análisis desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Actas del VII Simposio de Educación Matemática* pp.1-10. Universidad de Luján. Buenos Aires.

Parra, V; Otero, M. R; Elichiribehety, I; Cano, V. (2006) Organizaciones Matemáticas y Organizaciones Didácticas en la universidad en torno a la noción de función: un estudio de caso. *Actas de las Segundas Jornadas Nacionales en Didácticas Específicas*. UNSAM. Buenos Aires.

Parra, V.; Cano, V.; Elichiribehety, I.; Otero, M. (2006) Análisis de Praxeologías Matemáticas en el nivel universitario en torno a la noción de función. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 19,* pp. 11-17. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa CLAME .México.