

## Situações-problema de função afim: uma classificação fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais

Leonardo Ferreira Zanatta<sup>1</sup>, Veridiana Rezende<sup>2</sup>

[leonardo.zanatta04@gmail.com](mailto:leonardo.zanatta04@gmail.com), [rezendeveridiana@gmail.com](mailto:rezendeveridiana@gmail.com)

<sup>1</sup>Unioeste, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Rua Universitária, 1619, Cascavel, Brasil.

<sup>2</sup>Unespar, Universidade Estadual do Paraná, Av. Comendador Norberto Marcondes, 733, Campo Mourão, Brasil.

### Resumo

Este artigo tem por objetivo analisar a estrutura de situações-problema de função afim à luz da Teoria dos Campos Conceituais. O estudo foi direcionado a partir das situações-problema mistas, descritas como aquelas que carregam ao menos uma operação de adição e uma operação de multiplicação. Foram analisadas duas situações-problema de função afim a partir de suas estruturas e de seus esquemas sagitais. Para a análise, considerou-se a associação entre funções afim e as situações-problema mistas, bem como adaptações da simbologia trazidas para a Teoria dos Campos Conceituais. Essas adaptações visam contemplar a distinção entre etapas intermediárias e principais de resolução, além do dinamismo das funções, que envolvem a presença de variáveis nos esquemas sagitais. As classificações discutidas no texto permitiram captar a complexidade dos situações-problema mistas, evidenciando a existência de diferentes estruturas relacionadas à função afim e, assim, contribuindo para uma compreensão mais aprofundada sobre esse conceito.

**Palavras-chave:** Didática da Matemática. Função do Primeiro Grau. Campo Conceitual. Situações Mistas.

### Situaciones-problema de función afín: una clasificación basada en la Teoría de los Campos Conceptuales

#### Resumen

Este artículo tiene como objetivo analizar la estructura de situaciones-problema de función afín a la luz de la Teoría de los Campos Conceptuales. El estudio se orientó a partir de las situaciones-problema mixtas, descritas como aquellas que contienen al menos una operación de suma y una operación de multiplicación. Se analizaron dos situaciones-problema de función afín a partir de sus estructuras y de sus esquemas sagitales. Para el análisis, se consideró la asociación entre funciones afines y las situaciones-problema mixtas, así como adaptaciones de la simbología incorporadas a la Teoría de los Campos Conceptuales. Estas adaptaciones tienen como finalidad contemplar la distinción entre etapas intermedias y principales de resolución, además del dinamismo de las funciones, que implican la presencia de variables en los esquemas sagitales. Las clasificaciones discutidas en el texto permitieron captar la complejidad de las situaciones-problema mixtas, evidenciando la existencia de diferentes estructuras relacionadas con la función afín y, de esta manera, contribuyendo a una comprensión más profunda de este concepto.

**Palabras clave:** Didáctica de la Matemática. Función de primer grado. Campo Conceptual. Situaciones Mixtas.

### Problem situations involving affine functions: a classification based on the Theory of Conceptual Fields

#### Abstract

This article aims to analyze the structure of linear function problem-situations in the light of the Theory of Conceptual Fields. The study was directed from mixed problem-situations, described as those that involve at least one addition operation and one multiplication operation. Two linear function problem-situations were analyzed based on their structures and sagittal schemas. For the analysis, the association between linear functions and mixed problem-situations was considered, as

well as adaptations of the symbolism introduced into the Theory of Conceptual Fields. These adaptations seek to address the distinction between intermediate and main stages of resolution, in addition to the dynamism of functions, which involve the presence of variables in the sagittal schemas. The classifications discussed in the text made it possible to capture the complexity of mixed problem-situations, highlighting the existence of different structures related to the linear function and thus contributing to a deeper understanding of this concept.

**Keywords:** Mathematics Didactics. Linear Function. Conceptual Field. Mixed Situations.

## Situations-problèmes de fonction affine : une classification fondée sur la Théorie des Champs Conceptuels

### Résumé

Cet article a pour objectif d'analyser la structure de situations-problèmes de fonction affine à la lumière de la Théorie des Champs Conceptuels. L'étude a été orientée à partir des situations-problèmes mixtes, décrites comme celles qui comportent au moins une opération d'addition et une opération de multiplication. Deux situations-problèmes de fonction affine ont été analysées à partir de leurs structures et de leurs schémas sagittaux. Pour l'analyse, on a pris en compte l'association entre fonctions affines et situations-problèmes mixtes, ainsi que des adaptations de la symbolique introduites dans la Théorie des Champs Conceptuels. Ces adaptations visent à distinguer les étapes intermédiaires et principales de la résolution, en plus du dynamisme des fonctions, qui impliquent la présence de variables dans les schémas sagittaux. Les classifications discutées dans le texte ont permis de saisir la complexité des situations-problèmes mixtes, mettant en évidence l'existence de différentes structures liées à la fonction affine et contribuant ainsi à une compréhension plus approfondie de ce concept.

**Mots clés:** Didactique des Mathématiques. Fonction du premier degré. Champ Conceptuel. Situations Mixtes.

## 1. INTRODUÇÃO

As situações, na Teoria dos Campos Conceituais (TCC), têm o sentido de tarefa e desempenham um papel central nesta teoria. É por meio delas que se pode acompanhar e analisar os processos cognitivos e os esquemas manifestados pelos sujeitos em suas resoluções. A TCC busca entender, o desenvolvimento da aprendizagem de competências complexas, integrando aspectos relacionados às situações, aos conceitos e aos sujeitos (Vergnaud, 1996). Para Vergnaud (1996), o processo de conceitualização não se dá de forma isolada, mas em conexão com uma diversidade de situações que lhe atribuem significados.

Essa diversidade de situações, juntamente com uma variedade de conceitos, símbolos, representações, propriedades e teoremas interligados, compõem o que Vergnaud (1993) designa como Campo Conceitual. O pesquisador se dedicou de forma mais enfática no estabelecimento de dois campos conceituais – o campo conceitual das estruturas aditivas e o campo conceitual das estruturas multiplicativas – assim como explorou mais detalhadamente as classificações das situações pertencentes a estes campos conceituais.

Com menor ênfase e sem apresentar uma classificação explícita, Vergnaud (2009a) também considera situações que envolvem os campos conceituais aditivo e multiplicativo simultaneamente, denominando essas situações de problemas mistos. Neste artigo, nos referimos tais situações como situações-problema mistas. Essa escolha reforça que o enunciado em questão possui um contexto e

não se trata de uma tarefa puramente algébrica além de envolver estruturas aditivas e multiplicativas.

A investigação de situações-problema mistas converge com um dos objetivos do Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática (GEPeDiMa)<sup>1</sup>: atribuir significado ao conceito de função afim por meio da identificação, classificação e delimitação de um conjunto de situações, partindo do princípio de que toda situação-problema mista pode ser analisada e classificada, com base na TCC. Além disso, o Grupo avança ao considerar que toda situação-problema que envolve função afim pode ser identificada como uma situação-problema mista e classificada à luz da TCC. Para tanto, diversas produções e materiais, como livros didáticos, teses de doutorado, dissertações de mestrado e provas de avaliações em larga escala, vêm sendo analisados pelos membros do Grupo GEPeDiMa (Miranda, 2019; Rodrigues, 2021; Cappelin; Rezende, 2021; Fuzzo, 2022; Rodrigues; Rezende, 2023; Tieppo, et al. 2023; Tieppo, 2024).

A forma como as pesquisas tipificam e classificam as situações-problema mistas, quando associadas à função afim, vêm sendo desenvolvida e aperfeiçoada pelos integrantes do GEPeDiMa. Todavia, ainda não há uma metodologia consolidada que contemple de maneira abrangente a classificação dessas situações à luz da TCC.

Assim, este artigo<sup>2</sup> considera os avanços trazidos por estes autores no que tange à classificação de situações-problema mistas associadas à função afim. Nesse sentido, o texto construído assume como objetivo *analisar a estrutura de situações-problema de função afim à luz da Teoria dos*

<sup>1</sup> <https://prpgem.wixsite.com/gepedima>

<sup>2</sup> Este artigo é fruto de uma dissertação de mestrado desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática REIEC Año 2025 Nro. 20 Mes Diciembre  
Recepción: 29/04/2025

(PRPGEM), da Universidade Estadual do Paraná (Unespar) e defendida, no ano de 2024, pelo primeiro autor, sob orientação da segunda autora.

*Campos Conceituais*. Como consequência da análise, apresenta-se os respectivos esquemas sagitais e uma classificação para cada situação analisada.

Na sequência, são apresentados aspectos da Teoria dos Campos Conceituais, considerados necessários para a construção desta pesquisa, os procedimentos metodológicos, as discussões e as conclusões.

## 2. A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Gérard Vergnaud, pesquisador, professor e psicólogo francês, foi um dos precursores da Didática da Matemática na França e autor da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), concebida entre 1970 e 1990. Essa teoria explora uma abordagem cognitivista e encontra suas raízes nas perspectivas epistemológicas construtivista e sociointeracionista.

Vergnaud (1993, p. 1) afirma que a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) “[...] busca propiciar uma estrutura coerente e alguns princípios básicos ao estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas”. O pesquisador explica que a TCC foi desenvolvida “[...] para melhor compreender os problemas de desenvolvimento específico no interior de um mesmo campo de conhecimento” (Vergnaud, 1996, p. 11). Dessa forma, a aquisição de um conceito sob a perspectiva da TCC concerne a identificação de objetos, suas propriedades, e de como eles se relacionam a outros objetos (Otero et al. 2014).

Nesse contexto, a TCC se concentra em compreender o desenvolvimento e a aquisição de competências complexas (Vergnaud, 1993, 1996). Vergnaud (2003) ressalta a importância de compreender o processo cognitivo não apenas em termos de sua organização, conduta, percepção, representações ou competências, mas também em relação ao desenvolvimento dos caminhos com que esse processo cognitivo é organizado pelo indivíduo. Logo, compreender o desenvolvimento dessas organizações e as influências que as moldam é essencial, pois “[...] o que se desenvolve são formas de sua organização” (Vergnaud, 2003, p. 22).

Segundo Vergnaud (2011), o desenvolvimento de competências não é algo fugaz, pois “[...] não é em alguns dias ou em algumas semanas que uma criança adquire uma competência nova ou compreende um conceito novo, mas sim, ao longo de vários anos de escola e de experiência” (Vergnaud, 2011, p. 16). Conforme novas competências se desenvolvem, elas se apoiam, em parte, em habilidades já adquiridas, chamadas de filiações. Ao mesmo tempo, a conscientização necessária para formar uma nova competência exige que a criança supere, mesmo que de forma parcial, ideias e hábitos previamente adotados, o que Vergnaud define como rupturas (Vergnaud, 2011). Esse processo se dá por diversas etapas e ações de curto prazo, além de repetidos momentos de filiações e rupturas ao longo do processo de escolarização do sujeito.

Na TCC, a definição pragmática de conceito inclui tanto o conjunto de situações, quanto os esquemas utilizados pelos indivíduos nessas situações (Vergnaud, 1993). Assim, para a TCC, um conceito é constituído por três elementos inter-relacionados, o primeiro deles, a *referência*, corresponde ao conjunto de situações que dão sentido ao conceito; o *significado* se refere aos invariantes operatórios que

permitem a resolução dessas situações; e o *significante* engloba as representações linguísticas e simbólicas utilizadas para expressar o conceito. Essa ideia enfatiza que um conceito não é estático, mas se desenvolve a partir da interação do sujeito com diferentes situações. Moreira (2002) corrobora essa análise, defendendo que a compreensão completa do desenvolvimento e uso de um conceito exigem a consideração simultânea dessa tríade.

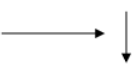
Vergnaud (1993, p. 9) estabelece que “[...] toda situação complexa seja analisada como uma combinação de tarefas, cuja natureza e dificuldades específicas devem ser bem conhecidas”, de forma que os processos cognitivos e as ações dos sujeitos dependem das situações com as quais eles são confrontados (Otero, 2010). Nesse sentido, Vergnaud (1993) apresenta duas ideias: a primeira refere-se à variedade, sugerindo que um Campo Conceitual abrange uma variedade de situações; a segunda trata sobre a história, que pode ser vista como as experiências dos sujeitos, de maneira que compreensão de um conceito está intrinsecamente ligada à vivência dele a diferentes classes de problemas.

Para contemplar essa diversidade de situações, compreende-se como necessário abordar as diferentes classes de situações que dão sentido ao conceito. Especificamente no área da Matemática, Vergnaud (2009a) delimitou e divulgou dois campos conceituais de forma mais enfática:

i) *campo conceitual das estruturas aditivas* estabelecido por Vergnaud (1993) como o conjunto de situações que envolvem operações de adição ou subtração, contempla conceitos e propriedades associados a essas operações. Esse campo conceitual é composto por seis classes de situações: composição de medidas, transformação de medidas, comparação de medidas, composição de transformações, transformação de relações e composição de relações.

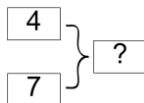
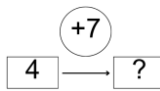
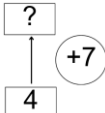
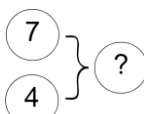
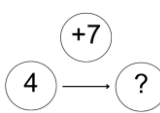
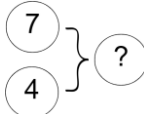
ii) *campo conceitual das estruturas multiplicativas* definido por Vergnaud (1993) como um conjunto abrangente de situações que envolvem operações de multiplicação, divisão e suas combinações. Esse campo conceitual engloba uma vasta gama de conceitos matemáticos, de forma que as situações contempladas nele podem ser classificadas como: proporção simples; proporção dupla; proporção múltipla; comparação multiplicativa; e produto de medidas (Vergnaud, 1993).

Vergnaud (2009a) propõe esquemas relacionais específicos para cada um dos campos de situações citadas, visando auxiliar na compreensão das estruturas que dão suporte às situações. Cada situação possui esquemas sagitais específicos, que representam a análise das estruturas da situação e, por consequência, permite a sua classificação. Tais esquemas são compostos por símbolos e códigos definidos por Vergnaud (2009a). O Quadro 1 ilustra a simbologia associada a estes esquemas.

| Nomenclatura                    | Símbolo                                                                           | Significado                                                                                     |
|---------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Retângulo                       |  | Número absoluto                                                                                 |
| Círculo ou elipse               |  | Número relativo                                                                                 |
| Chave (horizontal ou vertical)  |  | Composição de elementos da mesma natureza                                                       |
| Flecha (horizontal ou vertical) |  | Uma transformação ou uma relação, quer dizer, a composição de elementos de natureza diferentes. |

**Quadro 1:** Códigos e representações dos esquemas  
Fonte: Vergnaud (2009a, p. 201).

A classificação proposta por Vergnaud (2009a) para os problemas aditivos combina aspectos matemáticos e cognitivos, revelando a diversidade e complexidade dessas situações. Problemas que envolvem a mesma operação aritmética, dependendo de sua classificação, podem se apresentar de forma mais simples ou mais complexa. Para ilustrar essa variedade, o Quadro 2 apresenta exemplos de problemas para cada uma das classes aditivas, juntamente com seus respectivos esquemas sagiais.

| Situação                                                                                                                                           | Classificação                                           | Variação                                                                | Esquema Sagial                                                                        | Cálculo Numérico |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| Júlia possui 4 livros de ficção e 7 livros de romance. Quantos livros Júlia tem em sua coleção?                                                    | Composição de duas medidas em uma terceira              | Dadas as partes, busca-se o todo                                        |    | $4 + 7 = 11$     |
| Júlia tinha 4 livros de ficção e ganhou 7 livros de romance. Com quantos livros Júlia ficou ao todo?                                               | Transformação de uma medida inicial em uma medida final | Dado o estado inicial e uma transformação, busca-se o estado final      |    |                  |
| Júlia possui 4 livros e seu amigo Felipe possui 7 livros a mais que Júlia. Quantos livros Felipe possui?                                           | Relação de comparação entre duas medidas                | Dado o referente e a relação, busca-se o referido                       |   |                  |
| Em seu aniversário, Júlia ganhou 4 livros de seu amigo Felipe e 7 livros de sua amiga Larissa. Quantos livros Júlia ganhou de seus amigos?         | Composição de duas transformações                       | Dadas duas transformações (parte) busca-se a transformação total (todo) |  |                  |
| Júlia possuía 4 livros a mais que Felipe. Em seu aniversário, Júlia ganhou 7 livros. Quantos livros Júlia possui a mais que Felipe agora?          | Transformação de uma relação                            | Dada a relação inicial e a transformação, busca-se a relação final      |  |                  |
| Júlia tem 4 livros a mais que seu amigo Felipe. Felipe, por sua vez, tem 7 livros a mais que Larissa. Quantos livros Júlia tem a mais que Larissa? | Composição de duas relações                             | Dadas duas relações (partes), busca-se outra relação (todo)             |  |                  |

**Quadro 2:** Classes de problemas do campo aditivo, exemplos e esquemas  
Fonte: Elaborado pelos autores com base em Magina et al. (2008) e Vergnaud (2009a).

Todas as seis situações apresentadas podem ser resolvidas pela mesma operação,  $4 + 7 = 11$ , porém, o sucesso, ao apresentar uma resolução correta para cada uma delas, pode variar conforme a faixa etária e nível de escolarização. Tal divergência no nível de sucesso remete à organização do enunciado apresentado por cada tarefa, que possui estruturas distintas, tornando-as mais ou menos complexas. Isso é reforçado por Magina et al. (2008, p. 20), ao destacarem que “[...] a interpretação e a esquematização de um problema dependem, também, da forma como seu enunciado é proposto”.

Já o campo conceitual das estruturas multiplicativas se desdobra em relações ternárias e quaternárias. As relações

ternárias subdividem-se em proporção simples, proporção dupla e proporção múltipla. Da mesma forma, as relações quaternárias dividem-se em comparação multiplicativa e produto de medidas. Essas subdivisões se aprofundam, com cada eixo sendo desmembrado em classes; e cada classe assumindo um domínio discreto ou contínuo.

A classificação das situações multiplicativas demanda um aprofundamento específico de forma que, neste artigo, a ênfase é dada à classe de proporção simples como meio de introduzir a análise e classificação das estruturas multiplicativas. Souza e Magina (2017) trazem exemplos associadas à classe de proporção simples, que são ilustrados no Quadro 3 acompanhados de seus esquemas sagiais.

| Situação                                                                                        | Classificação     | Variação                                                                      | Esquema Sagital            |                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| Um bombom custa R\$ 3,00. Quanto pagarei se comprar 4 bombons?                                  | Proporção simples | um para muitos<br><i>multiplicação</i>                                        | <div>1</div> <div>4</div>  | <div>3</div> <div>?</div>  |
| Comprei 4 bombons iguais e paguei um total de R\$ 12,00. Quanto custou cada um?                 | Proporção simples | classe um para muitos<br><i>divisão-partição</i>                              | <div>1</div> <div>4</div>  | <div>?</div> <div>12</div> |
| Comprei R\$ 12,00 de bombons. Sabendo que cada bombom custou R\$ 3,00, quantos bombons comprei? | Proporção simples | classe um para muitos<br><i>divisão-cotação ou cota</i>                       | <div>1</div> <div>?</div>  | <div>3</div> <div>12</div> |
| Comprei 3 bombons por R\$ 9,00. Quanto pagarei para comprar 12 bombons?                         | Proporção simples | muitos para muitos<br>(quarta proporcional)<br><i>multiplicação e divisão</i> | <div>3</div> <div>12</div> | <div>9</div> <div>?</div>  |

**Quadro 3:** Situações de proporção simples

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Vergnaud (2009a), Gitirana *et al.* (2014) e Souza e Magina (2017).

Embora existam outros caminhos de resolução, aqui, para exemplificar a classe de proporção simples, o foco recairá nos caminhos que se enquadram nas variações dispostas pelo Quadro 3. O primeiro exemplo opera uma multiplicação  $x = 4 \times 3$ , enquanto os exemplos das linhas dois e três são resolvidos por divisões,  $x = 4/12$  e  $x = 12/3$ , respectivamente. Já o quarto exemplo se distingue dos três anteriores por demandar tanto uma operação de multiplicação quanto uma de operação de divisão.

Vergnaud (2009a) apresenta ainda problemas que envolvem múltiplas estruturas, sejam elas exclusivamente do campo conceitual aditivo, multiplicativo ou compostas por estruturas de ambos. Tais problemas são denominados como problemas complexos. Especificamente aqueles que apresentam uma combinação entre as estruturas aditiva e multiplicativa, são descritos como problemas mistos, aos quais são tratados, neste texto, como *situações-problema mistas*. Considerando o escopo dessa pesquisa e sua proximidade em relação à função afim, as situações-problema mistas serão abordadas, em maiores detalhes, na seção a seguir.

## 2.1. Situações-problema mistas e sua classificação

Vergnaud (2009a) considera que problemas puramente aditivos ou puramente multiplicativos podem ser limitados para oferecer uma visão ampla de problemas aritméticos, dado o volume de situações que não se restringem a uma única estrutura, seja aditiva ou multiplicativa. Essa discussão evidencia a importância das situações-problema mistas. A TCC não apresenta um direcionamento específico para a análise e classificação de problemas complexos, tampouco estabelece classes para tais problemas, por considerar que o número de possibilidades aumenta de forma desenfreada em relação ao número de relações elementares envolvidas. Isso incorre na ideia de que uma mesma situação-problema mista pode apresentar mais de uma classificação, mais de um esquema, a depender do caminho de resolução adotado, ainda que as soluções não tenham a mesma eficácia (Vergnaud, 2009b).

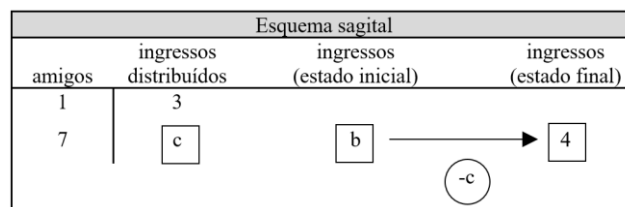
Desde 2017 o Grupo GEPeDiMa vem se dedicando à classificação de situações-problema mistas. Esse foco teve início com a proposta de classificação desenvolvida por

Miranda (2019), que buscou combinar estruturas aditivas e multiplicativas em um mesmo esquema sagital.

Para exemplificar a classificação e o esquema sagital propostos por Miranda (2019) para situações-problema mistas, apresenta-se, a seguir, a análise de uma situação-problema referente à classe de proporção simples e transformação de medidas, trazido por Rodrigues (2021, p. 77).

*Mariana tinha alguns ingressos para brinquedos de um parque de diversões para distribuir aos seus amigos. Cada um de seus 7 amigos recebeu 3 ingressos e, ainda, restaram 4 ingressos para Mariana. Quantos ingressos ela tinha antes da distribuição?*

Na análise da situação-problema, Rodrigues (2021) considerou o procedimento necessário para a resolução. Primeiramente, é preciso determinar quantos ingressos Mariana distribuiu, o que constitui uma relação quaternária de *proporção simples, do tipo um para muitos*, entre a quantidade de amigos e a quantidade de ingressos distribuídos. Assim, 1 amigo corresponde a 3 ingressos, enquanto 7 amigos a  $c$  ingressos. Em seguida, busca-se determinar o número total de ingressos que Mariana possuía inicialmente – o estado inicial –, o que constitui uma relação ternária de *transformação de medidas*. Logo, a situação-problema mista proposta, de acordo com a resolução descrita, apresenta o seguinte esquema sagital:



**Quadro 4:** Esquema sagital para classe de proporção simples e transformação de medidas

Fonte: Rodrigues (2021, p. 78).

Miranda (2019), ao propor a classificação de situações-problema mistas, buscou estabelecer ainda uma aproximação entre a função afim, tida em sua forma algébrica como  $f(x) = ax + b$ , e as classificações dos campos conceituais aditivo e multiplicativo, haja vista que,

por sua própria natureza, essa função carrega estruturas aditivas e multiplicativas.

Miranda (2019) propôs, inicialmente, a possibilidade de 30 classes para as situações mistas, compostas pela combinação de uma estrutura aditiva, com uma estrutura multiplicativa. A autora conduziu a análise de 89 problemas presentes em livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio, sendo identificadas nove classes para situações-problema mistas. Destas, sete foram fruto da combinação de uma estrutura aditiva e uma multiplicativa; enquanto duas classes possuíram um número superior a duas estruturas elementares. A pesquisa indicou que, embora fossem previstas 30 possíveis classes, 23 não foram identificadas nos livros didáticos analisados, enquanto outras duas não haviam sido previstas. Isso mostrou que a pesquisa não esgotou a tipologia proposta para a função afim, levantando a necessidade de que outras pesquisas, incluindo novas fontes, fossem realizadas.

A partir disso, Rodrigues e Rezende (2021) mapearam situações-problema mistas em livros didáticos do Ensino Fundamental - Anos Iniciais, e Cappelin e Rezende (2021) analisaram e classificaram situações relacionadas à afim em livros didáticos do Ensino Superior. Dentre as situações analisadas em ambas as pesquisas, somente uma classe que ainda não havia sido identificada por Miranda (2019) emergiu, nomeadamente, proporção simples (quarta proporcional) e composição de medidas.

Já Tieppo et al. (2023) buscaram construir uma análise das situações-problema mistas presentes em provas do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Após a análise de 10 situações, foi indicado que as situações possuíam um elevado número de estruturas, tanto aditivas, quanto multiplicativas, havendo situações com até cinco estruturas. Os pesquisadores pontuam que o elevado número de estruturas presentes nas provas do ENEM analisadas, em dissonância ao número de estruturas presentes na maior parte dos problemas de livros didáticos do Ensino Fundamental, Médio e Superior, pode representar um fator dificultador para os sujeitos.

Ao analisar situações associadas à função afim presentes em teses e dissertações, Tieppo (2024) mostrou que parte das classes, inicialmente propostas por Miranda (2019), não podem ser associadas à função afim. A autora argumenta que as estruturas multiplicativas de produto cartesiano, função bilinear e produto de medidas são frutos de operações que envolvem duas ou mais variáveis independentes, impossibilitando sua associação à taxa de variação de uma função afim.

Tieppo (2024) se dedicou, ademais, à classificação das situações por ela analisadas. Para abordar as situações-problema que envolvem a função afim, a autora propôs uma ampliação dos esquemas sagitais elaborados por Vergnaud (2009a) e adaptado por Miranda (2019). Essa proposta buscou representar o dinamismo característico das variáveis presentes nesses problemas, diferenciando-os dos aritméticos discutidos por Vergnaud (1982, 1993, 2009a). Tieppo (2024) propõe, para ilustrar visualmente as relações entre as variáveis, o uso de triângulos inscritos em círculos e retângulos originalmente apresentados na simbologia de Vergnaud (2009a). O Quadro 6 reúne os códigos adaptados por Tieppo (2024).

| Código                                                                            | Descrição                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
|  | O retângulo com um triângulo inscrito para representar uma variável real  |
|  | O círculo com um triângulo inscrito para representar uma relação variável |

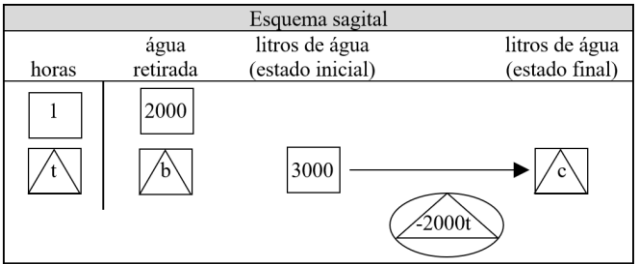
**Quadro 6:** Códigos para esquemas relacionais para situações-problema de funções

Fonte: Adaptado de Rezende e Nogueira (2024), com base em Tieppo (2024).

A fim de melhor exemplificar a adaptação trazida por Tieppo (2024), segue a análise de um enunciado proposto por Bernardino (2022, p. 68), relacionado à função afim.

*Para esvaziar uma piscina de 30.000L de água, será utilizada uma bomba com capacidade para retirar 2.000L de água por hora. Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba*

Assim como no exemplo analisado anteriormente, para a classificação, há de ser considerada uma proposta de resolução da situação-problema. Aqui, o volume de água presente na piscina varia em função do tempo, sendo retirados 2000 litros por hora; logo, o volume de água retirado pode ser expresso por  $2000t$ , o que caracteriza uma *proporção simples, do tipo um para muitos*. O enunciado informa que a piscina possui 30000 litros de água; assim, a relação entre o volume inicial e o volume final, após retirada a água, é dada por uma estrutura aditiva do tipo *transformação negativa*. Nesse sentido, a relação funcional estabelecida entre a quantidade de água,  $q$ , em função do tempo,  $t$ , pode ser dada por  $f(t) = 30000 - 2000t$ . Essa situação-problema, de acordo com a resolução descrita, apresenta o esquema sagital disposto no Quadro 7.



**Quadro 7:** Esquema sagital para classe de proporção simples e transformação de medidas

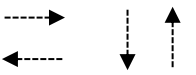
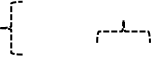
Fonte: Adaptado de Bernardino (2022, p. 69-70).

Cabe esclarecer que ambos exemplos de classificação apresentados aqui foram condensados para atenderem ao propósito desta discussão. O processo de classificação – explorado nas próximas seções do texto – é mais moroso e esmiuçado do que aqui descrito, conforme pode ser conferido em Bernardino (2022), Rodrigues (2021) e Tieppo (2024).

Ao analisar situações ligadas a juros simples, Fuzzo (2022) buscou estabelecer uma tipologia para tais situações, também com base na aproximação entre as estruturas aditivas e multiplicativas e a fórmula utilizada para calcular juros simples, expressa como  $M = C \times i \times t + C$ . O autor realizou um mapeamento de situações associadas a juros simples em livros didáticos do Ensino Médio. A pesquisa

evidenciou que, além dos problemas de juros simples carregarem os aspectos esperados de problemas complexos, eles podiam ser divididos entre etapas intermediárias de resolução e questão principal do enunciado (Fuzzo, 2002, Vergnaud, 2009a). Assim, Fuzzo (2022) propôs que a classificação também poderia ser dividida entre a questão principal do enunciado e etapas intermediárias de resolução, sendo estas as relações necessárias para obtenção dos dados que subsidiam a resolução da questão principal do enunciado.

A partir disso, Fuzzo (2022) incorpora uma adaptação à simbologia estabelecida por Vergnaud (2009a), com o objetivo de diferenciar as etapas de resolução intermediárias e a questão principal. Para tanto, Fuzzo (2022) faz uso de traços pontilhados ou tracejados para as etapas intermediárias e traços contínuos para a questão principal. O Quadro 5 dispõe os códigos propostos por Vergnaud (2009a), adaptador por Fuzzo (2022).

| Código                                                                              | Descrição                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | Retângulo pontilhado (tracejado) - um número para representar medidas em etapa intermediária            |
|    | Círculo pontilhado (tracejado) - número relativo para representar transformações em etapa intermediária |
|  | Flechas pontilhadas (tracejadas) - uma transformação, relação de comparação, ou uma relação             |
|  | Chave pontilhada (tracejada) - Composição de elementos de mesma natureza                                |

**Quadro 5:** Códigos adaptados para esquema relacional das etapas intermediárias

Fonte: Fuzzo (2022, p. 85).

Fuzzo (2022) expressa que o esquema principal é composto por uma associação dos diagramas das etapas intermediárias, demandadas para se atingir os coeficientes utilizados na resolução da questão principal do enunciado. Essa adaptação visou melhor adaptar a classificação de situações-problema mistas, quando estas carregam múltiplas estruturas aditivas ou multiplicativas. Exemplos para classificação de situações-problema que envolvam etapas intermediárias de resolução serão apresentados nas próximas seções do texto.

Os estudos discutidos nesta seção buscaram pontuar os avanços trazidos na classificação de situações-problema mistas, em especial aqueles associados à função afim. As adaptações propostas por membros do GEPeDiMa (Miranda, 2019; Fuzzo, 2022; Tieppo, 2024) ressaltam a complexidade com que as situações-problema mistas podem se apresentar, além de indicar a relevância de se trabalhar com situações que não apenas variem em contexto, mas também em suas estruturas.

### 3. METODOLOGIA

A pesquisa aqui descrita analisou a estrutura de situações-problema de função afim à luz da Teoria dos Campos Conceituais. Como meio para atingir tal objetivo, foram

analisadas duas situações-problema de função afim com etapas intermediárias de resolução. Elas foram selecionadas para análise considerando seu potencial de ilustrar o processo de análise e classificação de situações-problema mistas.

Primeiramente, considera-se as etapas intermediárias como os cálculos necessários para resolução, mas que não produziam, como resultado, algum dos termos da função esperada como resposta para cada situação-problema. Já a etapa principal ou questão principal corresponde aos cálculos cujo resultado corresponde a algum dos termos da função esperada pelo enunciado da situação-problema como resposta.

Para a classificação das situações-problema, foram consideradas as pesquisas de Miranda (2019), Fuzzo (2022) e Tieppo (2024). Assume-se a organização dos esquemas sagitais de Miranda (2019) referente à classe de proporção simples e transformação de medidas. Todavia, houve a necessidade de que tais esquemas fossem adaptados, ao considerar a existência de etapas intermediárias de resolução e, por consequência, uma quantidade de estruturas aditivas e multiplicativas superior àquela discutido por Miranda (2019).

Nesse sentido, como meio de contemplar a classificação de etapas intermediarias de resolução, esta pesquisa adotou a adaptação proposta por Fuzzo (2022), incorporando códigos tracejados para representar as etapas intermediárias de resolução. As etapas principais, apresentadas com os códigos em linhas contínuas, são representadas pelos itens que fazem referência direta aos coeficientes  $a$  e  $b$  da função afim que responde o enunciado.

Por fim, considerando tratar-se de situações-problema que envolvem funções, ou seja, possuem variáveis, foram consideradas também as adaptações nos códigos trazidas por Tieppo (2024). O triângulo inscrito no retângulo foi utilizado para demarcar uma variável de domínio  $\mathbb{R}$ , já o triângulo inscrito no círculo representa a ocorrência de uma relação variável, um número relativo.

Considerando ainda a multiplicidade de caminhos que as situações complexas podem assumir e, por consequência, a diversidade de esquemas para uma mesma situação, a classificação aqui apresentada para ambas as situações-problema assume a premissa de obter, como resposta final, uma função afim. Ainda, considerando tal diversidade, na situação-problema 1, a análise é realizada a partir de um caminho que considera obtenção de uma solução cuja grandeza considerada pertencente a um domínio discreto; já, para a situação-problema 2, a classificação foi realizada buscando por uma solução a partir de uma grandeza contida em um domínio contínuo.

### 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

As situações aqui analisadas foram desenvolvidas buscando contemplar uma diversidade de estruturas aditivas e multiplicativas, tidas como etapas intermediárias, a fim de propor um número distinto de estruturas entre as duas situações-problema. Para além deste critério, foram elaboradas situações-problema cuja solução ótima contemple uma função afim, sem a presença de subitens ou instruções detalhadas de resolução. Considerou-se ainda que

ambas as questões principais pertencessem à classe de proporção simples e transformação de medidas.

Ambas situações foram desenvolvidas por Zanatta (2024), em sua dissertação de mestrado, e foram implementadas junto a estudantes de Licenciatura em Matemática. A seguir, é apresentado o processo adotado para classificação das situações-problema mistas.

4.1. Análise da situação-problema 1

A situação-problema 1 apresenta dados quanto à produção e comercialização de sorvetes. Sua questão principal propõe

que seja apresentada uma representação matemática para o potencial de lucro ou prejuízo, considerando o número de sorvetes comercializados, os custos de produção e a comercialização do produto. A representação matemática do potencial de lucro ou prejuízo dessa sorveteria, mediante as informações dadas pelo enunciado, demanda a realização de etapas intermediárias de resolução, uma vez que parte dos dados não pode ser imediatamente ligada à representação matemática referida. É solicitado, ainda, que seja realizada uma representação visual para solução matemática obtida, que, aqui, é compreendida como a construção gráfica associada à representação matemática e cuja análise não está compreendida no escopo dessa investigação. Na Figura 1, consta o enunciado da situação-problema 1.



A gerência da sorveteria Latte Dulce quer melhorar o controle financeiro sobre suas vendas, para isso, organizou a análise do custo de produção de 12 litros de sorvete.

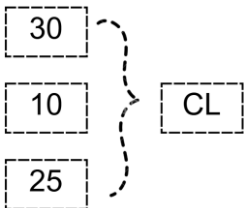
Para essa produção gasta-se: R\$ 30,00 em leite; R\$ 10,00 em açúcar; e R\$ 25,00 em outros insumos. Há ainda um custo de R\$ 0,50 por sorvete vendido, referente à casquinha em que cada sorvete é servido. Além disso, a sorveteria possui custos fixos mensais que totalizam R\$ 12.110,00.

Com relação às vendas, sabemos que a sorveteria vende cada unidade de sorvete por R\$ 8,00, e que cada um possui em média 300 ml de sorvete.

Considerando o potencial de lucro ou prejuízo dessa sorveteria, represente-o matematicamente. E apresente como ele pode ser representado visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações pela gerência da sorveteria.

Figura 1: situação-problema 1  
Fonte: Zanatta (2024, p. 59).

Dentre as informações apresentadas no enunciado, a primeira se refere aos custos dos ingredientes para a fabricação de um lote de 12 litros de sorvete. A soma dos custos com leite, açúcar e outros insumos resulta no custo do lote (CL), dado pela soma  $CL = 30 + 10 + 25 = 65$ , em que os valores são dados em reais, como unidade monetária. Trata-se de uma relação ternária das estruturas aditivas, da categoria composição de medidas, em que, dadas as partes, busca-se o todo, conforme o esquema relacional a seguir.

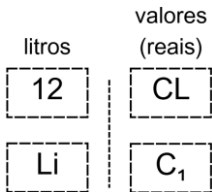


O segundo ponto a ser abordado diz respeito às unidades de medida em que o sorvete é produzido e comercializado, de forma que há a necessidade de se realizar a conversão, ou do volume produzido para mililitros ou do volume comercializado para litros. Essa escolha, embora não afete o número de etapas intermediárias, altera a classificação dessas etapas, o que pode influenciar no nível de complexidade da situação-problema. O caminho aqui apresentado realiza a conversão do volume de sorvete comercializado de mililitros para litros, que pode ser representada algebricamente da seguinte maneira,  $Li = 300/1000 = 0,3$ . O esquema relacional referente a essa etapa está apresentado a seguir.



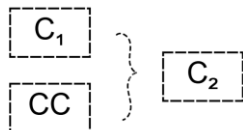
O esquema apresentado é uma relação quaternária das estruturas multiplicativas, da categoria de proporção simples, um para muitos, cota.

A etapa seguinte busca pelo custo de um sorvete ao ser comercializado ( $C_1$ ) de forma que esse custo pode ser obtido pela relação entre as grandezas resultantes nas duas etapas intermediárias anteriores, o custo de produção do lote (CL) e o volume de sorvete comercializado (Li). Algebricamente, tem-se,  $C_1 = (65/12) \times 0,3 = 1,625$ . Especificamente, essa relação de proporcionalidade entre duas grandezas pertence à categoria de proporção simples e à classe muitos para muitos, quarta proporcional. Seu esquema relacional é descrito a seguir.

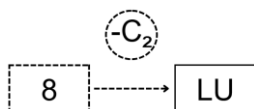


Outra informação que o enunciado apresenta corresponde ao custo de cada casquinha (CC) em que o sorvete é servido. Na etapa anterior, obteve-se o custo do sorvete

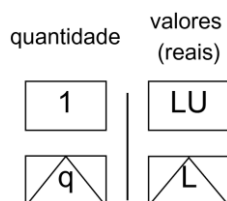
comercializado ( $C_1$ ), de forma que, uma vez que, tanto o custo da casquinha quanto o custo do sorvete comercializados se referem a uma unidade comercializada, torna-se possível relacionar ambos valores para que seja obtido o custo total por sorvete comercializado ( $C_2$ ). Isto é, algebricamente tem-se,  $C_2 = 1,625 + 0,50 = 2,125$ . Essa adição trata-se de uma relação entre duas medidas de mesma natureza, em que, dadas as partes, busca-se o todo, sendo essa uma relação ternária das estruturas aditivas, da categoria composição de medidas, em que o esquema relacional é apresentado a seguir.



A etapa intermediária subsequente também é composta por uma relação entre duas grandezas. Porém, nesse caso, embora sejam grandezas de mesma natureza, há uma relação dinâmica, em que o lucro bruto unitário ( $R\$ 8,00$ ) é transformado no lucro unitário ( $LU$ ). Tal transformação negativa é representada algebricamente por  $LU = 8 - 2,125 = 5,875$ , conforme o seguinte esquema relacional.



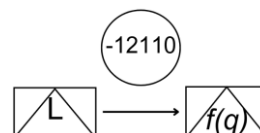
Uma vez obtido o lucro unitário ( $LU$ ), torna-se possível obter o lucro total da sorveteria ( $L$ ), representado por uma relação quaternária das estruturas multiplicativas, da categoria de proporção simples, um para muitos, multiplicação, a qual relaciona o lucro unitário ( $LU$ ) a uma quantidade qualquer de sorvetes comercializados ( $q$ ), conforme o esquema relacional apresentado a seguir.



Essa proporção simples é representada algebricamente como  $L = 5,875q$ . Aqui, destaca-se o uso do triângulo inscrito no retângulo para simbolizar as variáveis da função afim, buscada na resolução da situação-problema. Essa abordagem, pautada por Tieppo (2023), consiste em uma extensão dos símbolos da Teoria dos Campos Conceituais, inicialmente utilizados apenas para representar números pertencentes aos conjuntos dos naturais, inteiros e racionais,

e atualmente ampliados com o triângulo, de modo a contemplar também a representação de variáveis.

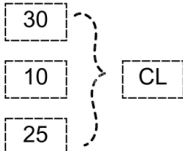
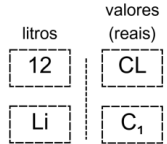
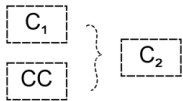
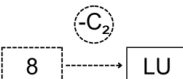
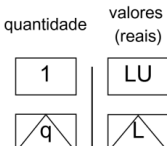
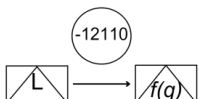
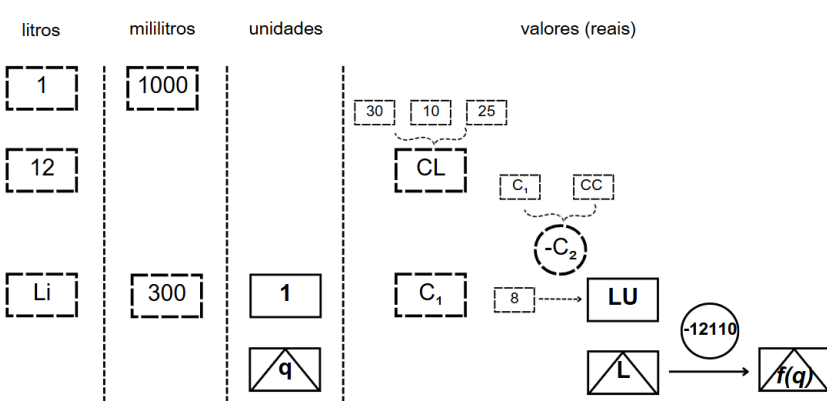
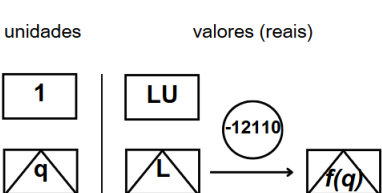
Por fim, obtido o lucro total da sorveteria ( $L$ ), em função da quantidade de sorvete comercializada ( $q$ ), é possível deduzir os custos fixos da sorveteria ( $R\$ 12110,00$ ), para que seja obtida a função que expressa o potencial de lucro ou prejuízo dessa empresa ( $f(q)$ ), representada algebricamente como  $f(q) = 5,875q - 12110$ . Aqui, também, há uma relação dinâmica entre as grandezas, caracterizando uma transformação negativa, representada conforme o esquema relacional a seguir.



A solução apresentada pelo problema, de acordo com as escolhas adotadas, resulta em uma função afim, dada por  $f(q) = 5,875q - 12110$ , porém algumas questões devem ser discutidas. A função apresentada,  $f(q)$ , tem como variável a quantidade de sorvetes comercializados, e o enunciado não aponta para a possibilidade de que essa comercialização possa ser feita sob outro volume que não 300 mililitros por unidade, tratando-se, assim, de um domínio discreto.

Dado o exposto, foram consideradas as relações estabelecidas entre: os custos com leite ( $R\$ 30,00$ ), açúcar ( $R\$ 10,00$ ) e outros insumos ( $R\$ 25,00$ ), para obtenção do custo do lote ( $CL$ ); o volume de sorvete comercializado em cada unidade (300 mililitros) e o número de mililitros em um litro (1000), para obtenção do volume de sorvete comercializado ( $Li$ ); o custo de produção do lote ( $CL$ ) e o volume de sorvete comercializado ( $Li$ ), para se obter o custo do sorvete comercializado ( $C_1$ ); o custo de cada casquinha ( $CC$ ) e o custo do sorvete comercializado ( $C_1$ ), para se obter o custo total por sorvete comercializado ( $C_2$ ); o custo total por sorvete comercializado ( $C_2$ ) e o lucro bruto unitário ( $R\$ 8,00$ ), para se obter o lucro unitário ( $LU$ ); o lucro unitário ( $LU$ ) e uma quantidade qualquer de sorvetes comercializados ( $q$ ), para se obter o lucro total da sorveteria ( $L$ ); e o lucro total da sorveteria ( $L$ ) e o custos fixos da sorveteria ( $R\$ 12.110,00$ ), para obter função que expressa o potencial de lucro ou prejuízo ( $f(q)$ ).

De acordo com o citado, por se tratar de uma situação-problema complexa, para sua classificação, foi adotado um caminho de resolução que, simultaneamente, atendesse ao que foi proposto pelo enunciado e que apresentasse o menor número de etapas intermediárias para a resolução. Dessa forma, o Quadro 8 apresenta as expressões numéricas, seus esquemas relacionais e as categorias associadas a eles.

| Etapa                                                                               | Expressão numérica<br>(resultado)                                                      | Esquema relacional                                                                   | Categoria                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| INTERMEDIÁRIAS                                                                      | $30 + 10 + 25 = 65$<br>custo do lote (CL)                                              |    | Composição de medidas                                             |
|                                                                                     | $\frac{300}{1000} = 0,3$<br>volume de sorvete comercializado (Li)                      |    | Proporção simples um para muitos - cota                           |
|                                                                                     | $\frac{65}{12} * 0,3 = 1,625$<br>custo do sorvete comercializado (C <sub>1</sub> )     |    | Proporção simples muitos para muitos                              |
|                                                                                     | $1,625 + 0,50 = 2,125$<br>custo total por sorvete comercializado (C <sub>2</sub> )     |    | Composição de medidas                                             |
|                                                                                     | $8 - 2,125 = 5,875$<br>lucro unitário (LU)                                             |    | Transformação negativa                                            |
| PRINCIPAIS                                                                          | $5,875q$<br>lucro total da sorveteria (L)                                              |   | Proporção simples um para muitos - multiplicação                  |
|                                                                                     | $f(q) = 5,875q - 12110$<br>função que expressa o potencial de lucro ou prejuízo (f(q)) |  | Transformação negativa                                            |
|                                                                                     | ESQUEMA RELACIONAL                                                                     |                                                                                      | Proporção simples, transformação negativa e etapas intermediárias |
|                                                                                     |    |                                                                                      |                                                                   |
|                                                                                     | ESQUEMA RELACIONAL PRINCIPAL                                                           |                                                                                      | Proporção simples e transformação de medidas                      |
|  |                                                                                        |                                                                                      |                                                                   |

**Quadro 8:** Classificação situação-problema 1  
Fonte: adaptado de Zanatta (2024, p. 62-64).

Com base nas nomenclaturas propostas por Vergnaud (2009a) para as classes de situações do Campo Conceitual das estruturas aditivas e multiplicativas, nas contribuições de Fuzzo (2022) para a classificação de situações que envolvem etapas intermediárias de resolução e no objetivo de responder à questão principal da situação-problema de função afim, com foco na busca pela modelação algébrica, a situação-problema 1 foi classificada como *proporção simples e transformação de medidas, com etapas intermediárias de duas composições de medidas, três proporções simples e duas transformações de medidas*.

### 4.2. Análise da situação-problema 2

A segunda situação-problema apresenta um maior número de etapas intermediárias em sua resolução em comparação à

situação-problema 1. A situação-problema 2 apresenta o contexto de uma propriedade rural que comercializa queijos, além de informações quanto aos custos de operação e de seu processo produtivo. A questão principal da situação-problema prevê que seja realizada uma representação matemática para o potencial de lucro ou prejuízo sobre a venda de queijos. A representação matemática do potencial de lucro ou prejuízo dessa situação-problema, considerando as informações dadas pelo enunciado, demanda a realização de etapas intermediárias de resolução, uma vez que parte dos dados não pode ser imediatamente ligada à representação matemática referida. Assim como na primeira situação-problema apresentada, solicita-se uma representação visual para a resolução matemática obtida, também compreendida como a construção gráfica associada à representação matemática apresentada e que não integra o escopo dessa análise.

A família Barboza é produtora de queijos artesanais e decidiu avaliar este empreendimento que está há várias décadas na família. Para essa avaliação organizou as seguintes informações:

Para o manejo mensal de cada animal tem-se alguns custos médios: vacinação, vermifugação e remédios R\$ 175,00; alimentação e suplementação, R\$ 520,00; outros custos por animal R\$ 55,00. Além dos custos para cada animal, a família arca com outros custos fixos mensais da propriedade, sendo eles: manutenção de maquinário R\$ 900,00; valor pago de arrendamento da propriedade R\$ 3.000,00; mão de obra R\$ 5.200,00; outros custos R\$ 2.500,00




Com relação a produção e venda: em média cada vaca na propriedade produz diariamente 22 litros de leite; são necessários aproximadamente 11 litros de leite para produzir 1 kg de queijo; e cada peça de queijo de 720 gramas é vendida por R\$ 36,00.

Considerando o potencial de lucro ou prejuízo da família com a venda de queijos, represente-o matematicamente. E apresente como ele pode ser representado visualmente de forma a facilitar a compreensão das informações por essa família.

**Figura 2:** Situação-problema 2  
 Fonte: Zanatta (2024, p. 75).

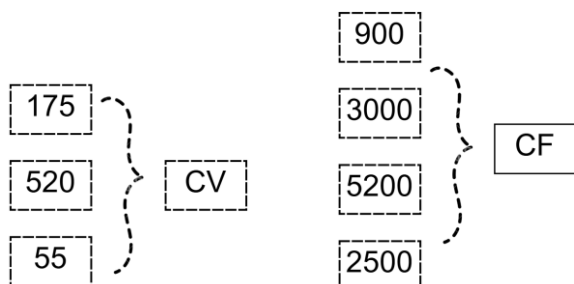
A primeira informação apresentada pelo enunciado corresponde ao volume de leite produzido diariamente por cada vaca na propriedade, seguido pelo volume necessário de leite para que seja produzido 1 quilo de queijo. Com base nessas informações, torna-se possível realizar uma relação de proporcionalidade entre a produção de leite diária em litros (22) e o volume de leite por quilo de queijo em litros (11), para obter a quantidade de queijo diária por animal (QQD). Essa proporcionalidade pode ser representada algebricamente da seguinte maneira  $QQD = 22/11 = 2$ . Essa relação compreende uma relação quaternária, do campo multiplicativo, da categoria de proporção simples e classe um para muitos, cota, e pode ser representada pelo seguinte esquema relacional.

|        |        |
|--------|--------|
| quilos | litros |
| 1      | 11     |
| QQD    | 22     |

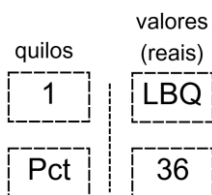
O esquema apresentado evidencia que cada vaca da propriedade tem capacidade para fornecer leite suficiente para que sejam produzidos 2 quilos de queijo por dia. A próxima informação presente no enunciado corresponde ao peso de cada pacote de queijo produzido, sendo que cada pacote pesa 720 gramas. Uma vez que o enunciado apresenta parte dos dados em gramas e parte em quilos, é necessária a conversão entre as unidades de medida, neste caso a conversão de gramas para quilos. Essa conversão, algebricamente representada por  $Pct = 720/1000 = 0,72$ , também é descrita por uma proporção simples, da classe um para muitos, cota, conforme o esquema relacional apresentado a seguir.

|        |        |
|--------|--------|
| quilos | gramas |
| 1      | 1000   |
| Pct    | 720    |

A segunda parte do enunciado apresenta os custos por animal ( $CV$ ) e os custos fixos da propriedade ( $CF$ ). Ambos podem ser representados por estruturas aditivas da categoria de composição de medidas, em que, dadas as partes, busca-se o todo. Assim, em relação aos custos por animal, algebricamente, tem-se  $CV = 175 + 520 + 55 = 750$  e, em relação aos custos da propriedade,  $CF = 900 + 3000 + 5200 + 2500 = 11600$ . Essas operações podem ser representadas por meio dos seguintes esquemas relacionais.

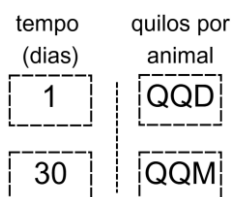


Considerando novamente a necessidade de que as unidades de medidas das grandezas que compõem o problema sejam iguais, e uma vez que o valor de venda fornecido pelo enunciado se refere a um pacote de 720 gramas, cabe determinar o valor de venda do quilo de queijo, aqui denominado de lucro bruto por quilo ( $LBQ$ ). Dessa forma, é possível estabelecer uma relação ternária descrita por uma proporção simples, da classe um para muitos, cota, conforme o esquema relaciona apresentado a seguir.



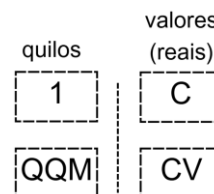
Algebricamente, essa relação pode ser representada da seguinte maneira  $LBQ = 36/0,72 = 50$ . Assim, sendo que um pacote de 720 gramas de queijo é comercializado por R\$ 36,00, o quilo do queijo é comercializado por R\$ 50,00.

Uma vez que os custos por animal ( $CV$ ) e os custos fixos ( $CF$ ) são dados para o período de um mês, é necessário que outras grandezas também sejam dadas em meses. Devido ao fato de que, em uma etapa intermediária anterior, foi estabelecida a quantidade de queijo diária por animal ( $QQD$ ) e considerando o mês comercial de 30 dias, cabe determinar a quantidade de queijo mensal por animal ( $QQM$ ). Essa relação pode ser representada por uma proporção simples um para muitos – multiplicação, expressa algebricamente por  $QQM = 30 * 2 = 60$  e pelo seguinte esquema relacional.

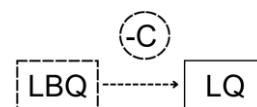


Diante disso, há a interpretação de que, se um animal produz 2 quilos de queijo por dia e se o mês comercial possui 30 dias, cada vaca possui capacidade produtiva de 60 quilos de queijo por mês. Uma vez que todas as grandezas estão descritas para o período de um mês, torna-se possível

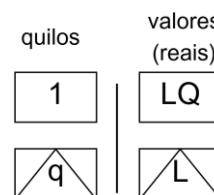
determinar o custo por quilo de queijo ( $C$ ). Nesse sentido, o custo por quilo ( $C$ ) deriva da relação entre a quantidade de queijo mensal por animal ( $QQM$ ) e o custo por animal ( $CV$ ). Assim, considerando que 60 quilos de queijo correspondem a um custo de R\$ 750,00, o custo por quilo pode ser dado por uma relação quaternária de proporção simples, um para muitos, partição, expressa, algebricamente, como  $C = 750/60 = 12,50$ , cujo esquema relacional é apresentado a seguir.



Com isso, o custo de produção para um quilo de queijo é igual a R\$ 12,50, de forma que, estabelecido o custo por quilo ( $C$ ) e o lucro bruto por quilo ( $LBQ$ ), é possível estabelecer o lucro por quilo ( $LQ$ ). Algebricamente, o lucro por quilo pode ser expresso por  $LQ = 50 - 12,50 = 37,50$ . Aqui, há o entendimento de que o lucro bruto por quilo ( $LBQ$ ) é transformado ao se subtrair o custo por quilo, no lucro por quilo ( $LQ$ ). Esse entendimento decorre da interpretação de que a natureza das grandezas de custo e lucro são distintas, de forma que não há uma relação de parte todo. Assim, essa relação integra a categoria de transformação negativa de medidas, representada pelo seguinte esquema relacional.

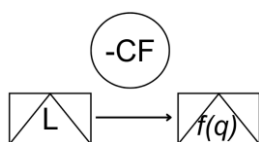


Estabelecido o lucro por quilo ( $LQ$ ), cabe considerar esse valor para uma quantidade qualquer de queijo, para que seja determinado o lucro ( $L$ ). Algebricamente, essa projeção pode ser descrita como uma relação entre o lucro por quilo ( $LQ$ ) e a quantidade ( $q$ ) da seguinte maneira,  $L = 37,5q$ . Essa multiplicação caracteriza uma relação quaternária das estruturas multiplicativas da categoria proporção simples e classe um para muitos, multiplicação, e pode ser descrita pelo seguinte esquema relacional.



Uma vez mais, a classificação faz uso da adaptação na simbologia original trazida pela TCC, recorrendo ao triângulo inscrito como meio para representar as variáveis da função afim.

Por fim, a última das etapas intermediárias relaciona o lucro ( $L$ ) ao custo fixo da propriedade ( $CF$ ). Essa relação é constituída por uma relação ternária pertencente às estruturas aditivas da categoria de transformação (negativa) de medidas, conforme o esquema relacional a seguir.



Algebricamente, a relação estabelecida configura uma função afim, expressa da seguinte maneira,  $f(q) = 37,5q - 11600$ , em que  $f(q)$  é dada pela multiplicação da quantidade de queijo comercializado ( $q$ ) pelo lucro por quilo de queijo ( $LQ$ ), subtraída pelo custo fixo da propriedade ( $CF$ ). Dessa forma, a função estabelecida compreende a resposta final para a situação-problema, representando o lucro dentro de um mês da propriedade em função do volume de queijo comercializado. Cabe apontar que a função estabelecida considera apenas o período de um mês, conforme solicitado pelo enunciado, de forma que, caso essa projeção fosse ampliada para um período qualquer, haveria a introdução de uma segunda variável.

A situação-problema apresenta, em seu enunciado, informações sobre a produção e comercialização de queijos em uma propriedade rural, além dos custos de manutenção da propriedade, solicitando a projeção de lucro dessa propriedade dentro de um mês. Os dados do enunciado são dispostos de forma que a resolução da situação-problema apresente possibilidades de escolhas ao longo da resolução, que podem gerar caminhos adequados, parcialmente adequados ou inadequados de resolução. Essas escolhas compõem as etapas intermediárias de resolução da situação-problema e podem interferir em sua classificação, de forma que o caminho aqui apresentado foi considerado como

aquele que apresenta o menor número de etapas intermediárias.

Dado o exposto, foram consideradas as relações estabelecidas entre: produção de leite diária em litros (22) e o volume de leite por quilo de queijo em litros (11), para obter a quantidade de queijo diária por animal ( $QQD$ ); o peso de cada pacote de queijo em gramas (720) e o número de gramas em um quilo (1000), para obter o peso de cada pacote em quilos ( $Pct$ ); vacinação, vermifugação e remédios (R\$ 175,00), alimentação e suplementação (R\$ 520,00) e outros custos por animal (R\$ 55,00), para obter o custo por animal ( $CV$ ); manutenção de maquinário (R\$ 900,00), arrendamento da propriedade (R\$ 3000,00), mão-de-obra (R\$ 5.200,00) e outros custos (R\$ 2500,00), para obter os custos fixos ( $CF$ ); o preço de venda do pacote (R\$ 36,00) e o peso de cada pacote em quilos ( $Pct$ ), para obter o lucro bruto por quilo ( $LBQ$ ); a quantidade de queijo diária por animal ( $QQD$ ) e o número de dias em um mês comercial (30), para obter a quantidade de queijo mensal por animal ( $QQM$ ); a quantidade de queijo mensal por animal ( $QQM$ ) e o custo por animal ( $CV$ ), para obter o custo por quilo ( $C$ ); o lucro bruto por quilo ( $LBQ$ ) e o custo por quilo ( $C$ ), para obter o lucro por quilo ( $LQ$ ); o lucro por quilo ( $LQ$ ) e a quantidade comercializada ( $q$ ), para obter o lucro ( $L$ ); e o lucro ( $L$ ) e os custos fixos ( $CF$ ), para obter função que expressa o potencial de lucro ou prejuízo ( $f(q)$ ).

O Quadro 9 apresenta as expressões numéricas, seus esquemas relacionais e as consequentes categorias.

| Etapas         | Expressão numérica (resultado)                                       | Esquema relacional                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Categoria                                           |
|----------------|----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| INTERMEDIÁRIAS | $\frac{22}{11} = 2$ quantidade de queijo diária por animal ( $QQD$ ) | quilos      litros<br><div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">1</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">11</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">QQD</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">22</div> </div>                                                                                                                 | Proporção simples um para muitos - cota             |
|                | $\frac{720}{1000} = 0,72$ peso de cada pacote em quilos ( $Pct$ )    | quilos      gramas<br><div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">1</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">1000</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">Pct</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">720</div> </div>                                                                                                              | Proporção simples um para muitos - cota             |
|                | $175 + 520 + 55 = 750$ o custo por animal ( $CV$ )                   | <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">175</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">520</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">55</div> </div> <div style="font-size: 2em; margin: 0 10px;">}</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">CV</div> </div>                                                                                       | Composição de medidas                               |
|                | $900 + 3000 + 5200 + 2500 = 11600$ custos fixos ( $CF$ )             | <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">900</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">3000</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">5200</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">2500</div> </div> <div style="font-size: 2em; margin: 0 10px;">}</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">CF</div> </div> | Composição de medidas                               |
|                | $\frac{36}{0,72} = 50$ lucro bruto por quilo ( $LBQ$ )               | quilos      valores (reais)<br><div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">1</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">LBQ</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">Pct</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">36</div> </div>                                                                                                       | Proporção simples um para muitos - divisão-partição |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                |                                                                                                        |                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | $30 * 2 = 60$<br>quantidade de queijo mensal por animal<br><i>(QQM)</i>                        | tempo<br>(dias)<br><div>1</div><br><div>30</div> quilos por animal<br><div>QQD</div><br><div>QQM</div> | Proporção simples um para muitos - multiplicação                    |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | $\frac{60}{750} = 12,50$<br>custo por quilo ( <i>C</i> )                                       | quilos<br><div>1</div><br><div>QQM</div> valores (reais)<br><div>C</div><br><div>CV</div>              | Proporção simples um para muitos - divisão-partição                 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | $50 - 12,50 = 37,50$<br>o lucro por quilo ( <i>LQ</i> )                                        | <div>LBQ</div> $\xrightarrow{-C}$ <div>LQ</div>                                                        | Transformação negativa                                              |
| PRINCIPAIS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | $37,5q$<br>lucro ( <i>L</i> )                                                                  | quilos<br><div>1</div><br><div>q</div> valores (reais)<br><div>LQ</div><br><div>L</div>                | Proporção simples um para muitos - multiplicação                    |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | $f(q) = 37,5q - 11600$<br>função que expressa o potencial de lucro ou prejuízo ( <i>f(q)</i> ) | <div>L</div> $\xrightarrow{-CF}$ <div>f(q)</div>                                                       | Transformação negativa                                              |
| ESQUEMA RELACIONAL                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                |                                                                                                        |                                                                     |
| <div> <div> <div>período (dia)</div> <div>quilos</div> <div>gramas</div> <div>litros</div> <div>Custo (reais)</div> <div>lucros (reais)</div> </div> <div> <div>1</div> <div>Pct</div> <div>1</div> <div>30</div> <div>QQD</div> <div>QQM</div> <div>q</div> </div> <div> <div>1000</div> <div>720</div> </div> <div> <div>11</div> <div>22</div> </div> <div> <div>C</div> <div>175 520 55</div> <div>CV</div> </div> <div> <div>LBQ</div> <div>36</div> </div> <div> <div>LQ</div> </div> <div> <div>175 175 520 55</div> <div>L</div> <div>-CF</div> <div>f(q)</div> </div> </div> |                                                                                                |                                                                                                        |                                                                     |
| ESQUEMA RELACIONAL PRINCIPAL                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                |                                                                                                        |                                                                     |
| <div> <div>quilos</div> <div>lucros (reais)</div> <div>1</div> <div>LQ</div> <div>q</div> <div>L</div> <div>-CF</div> <div>f(q)</div> </div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                |                                                                                                        |                                                                     |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                |                                                                                                        | Proporção simples, transformação de medidas e etapas intermediárias |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                |                                                                                                        | Proporção simples e transformação de medidas                        |

**Quadro 9:** Classificação situação-problema 2  
 Fonte: adaptado de Zanatta (2024, p. 80-81).

Para cada etapa intermediária, adotou-se a nomenclatura proposta por Vergnaud (2009a), tanto para as classes de situações do Campo Conceitual das Estruturas Aditivas, quanto para as do Campo Conceitual das Estruturas multiplicativas. Na classificação das situações, também foi considerada a proposta de Fuzzo (2022) para aquelas que envolveram etapas intermediárias de resolução. Tendo em vista o objetivo de responder à questão principal da situação-problema, com foco na modelação algébrica da função afim, a situação-problema em análise foi caracterizada como de *proporção simples e transformação de medidas, com etapas*

*intermediárias de seis proporções simples, duas composições de medidas e duas transformações de medidas.*

## 5. CONCLUSÕES

Esta pesquisa teve como objetivo analisar a estrutura de situações-problema de função afim sob a luz da Teoria dos Campos Conceituais. Nesse sentido, com base em Vergnaud (2003, 2009a), a conceitualização demanda vivência pelo aluno de situações que variem tanto em seus contextos,

como em suas estruturas de resolução. Essa ênfase de se trabalhar com situações diversas é reforçada por Gitirana et al. (2014, p. 09) ao assumir que “[...] um indivíduo não forma um conceito a partir da resolução de um único problema, nem tampouco de problemas similares”, e por Magina et al. (2008) ao afirmar que é comum que professores trabalhem com problemas prototípicos, restringindo as potencialidades do conceito de função.

Diante disso, esta pesquisa mostrou que as situações-problema de função afim são associadas a problemas mistos, conforme termo denominado por Vergnaud (2009a), ou seja, envolvem, ao menos, uma relação aditiva e, ao menos, uma relação multiplicativa. Para tanto, foram apresentados esquemas sagitais ampliados com base nas classificações e esquemas sagitais para os Campos Conceituais aditivo e multiplicativo, e nas pesquisas de Miranda (2019) e Tieppo (2024), incluindo símbolos próprios para o dinamismo das variáveis presentes nas funções. Foi mostrado, ainda, que certas situações-problema de função afim exigem etapas intermediárias, conforme explicitado por Fuzzo (2022). Concluiu-se, com isso, que, apesar da complexidade de certas situações-problema de função afim, a classificação de tais situações é possível de ser realizada à luz da TCC.

Assim buscou-se abordar a complexidade com que situações-problema de função afim podem assumir quando considerado o número de etapas intermediárias de resolução e, por consequência, de relações a ela associadas. E considerando aquilo que Tieppo et al. (2023) expõe ao indicar que esse número elevado de relações pode agir como um fator dificultador na resolução, as situações-problema aqui discutidas podem ser descritas como situações de complexidade elevada, elaboradas com vista em implementações junto à estudantes do Ensino Superior.

O elevado número de etapas intermediárias no enunciado foi estabelecido em consonância ao objetivo desta pesquisa, sendo assumido que um maior número de estruturas possibilitaria expor, de modo mais abrangente, a forma com a qual as situações-problema de função afim vêm sendo classificadas após as adaptações nos códigos de Vergnaud (1982, 1993, 2009a).

Nesse sentido, aponta-se a importância de o professor que ensina Matemática tomar conhecimento das diferentes classes e estruturas que podem ser associadas à função afim. Essa ciência, quanto à diversidade de classes, pode refletir em suas ações, de forma que sejam propostas aos estudantes situações de diferentes classes, assim construindo um cenário favorável ao desenvolvimento e consolidação do conceito de função afim.

## 6. AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) pelo apoio financeiro destinado ao primeiro autor no período de realização da pesquisa; e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo financiamento ao Projeto Universal Chamada CNPq/MCTI/FNDCT N° 18/2021 - Faixa A, processo 409195/2021-9, ao qual esta investigação está vinculada e do qual os autores fazem parte.

## 7. REFERÊNCIAS

- Bernardino, F. (2022). *Função afim e problemas mistos: Uma investigação com estudantes do Ensino Médio* [Dissertação, Universidade Estadual do Paraná]. <https://repositorio.unespar.edu.br/items/f1da8028-495e-4d44-b808-c5a5c5f223a6>
- Cappelin, A., & Rezende, V. (2021). Livro Didático do Ensino Superior e Função Afim: Um estudo de tarefas que envolvem aspectos gráficos e/ou situações-problema. *Anais. Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, online. <https://www.even3.com.br/anais/viiiisipemvs2021/381372-livro-didatico-do-ensino-superior-e-funcao-afim--um-estudo-de-tarefas-que-envolvem-aspectos-graficos-eou-situacao/>
- Fuzzo, R. A. (2022). *Uma tipologia de situações de juros simples com base na Teoria dos Campos Conceituais* [Dissertação, Universidade Estadual do Oeste do Paraná]. <https://tede.unioeste.br/handle/tede/6347>
- Gitirana, V., Campos, T. M. M., Magina, S., & Spinillo, A. (2014). *Repensando multiplicação e divisão: Contribuições da teoria dos campos conceituais* (1º ed.). Proem.
- Magina, S., Campos, T. M. M., Nunes, T., & Gitirana, V. (2008). *Repensando Adição E Subtração: Contribuições Da Teoria Dos Campos Conceituais* (3º ed.). Proem.
- Miranda, C. D. A. (2019). *Situações-problema que envolvem o conceito de função afim: Uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais* [Dissertação, Universidade Estadual do Oeste do Paraná]. <https://tede.unioeste.br/handle/tede/4671>
- Moreira, M. A. (2002). A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações em Ensino de Ciências*, 7(1). <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/141212>
- Otero, M. R. (2010). La Notion de Situation: Analyse depuis la Théorie des Champs Conceptuels, la Théorie des Situations, la Dialectique OutilObject et la Théorie Anthropologique du Didactique. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 5(1). <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3672962.pdf>
- Otero, M. R., Fanaro, M. de los A., Sureda, P., Llanos, V. C., & Arlego, M. (2014). *La Teoría de los Campos Conceptuales Y la conceptualización: En el aula de Matemática Y Física* (1º ed.). Dunken.
- Rezende, V., & Nogueira, C. M. I. (2024). Caracterização e classificação para problemas mistos, problemas complexos e situações-problema envolvendo função afim. *Anais. IX Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Natal. <https://www.sbemrasil.org.br/eventos/index.php/sipem/article/view/436>
- Rodrigues, C. L. B., & Rezende, V. (2023). Conhecimentos associados ao conceito de função manifestados por estudantes dos anos iniciais ao resolverem situações mistas. *Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática*, 32(1). <https://doi.org/10.48489/QUADRANTE.27811>

Rodrigues, C. L. H. (2021). *Invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados por alunos do 5o ano do Ensino Fundamental* [Dissertação, Universidade Estadual do Oeste do Paraná]. <https://tede.unioeste.br/handle/tede/5815>

Souza, E. I. R., & Magina, S. M. P. (2017). A Concepção de Professor do Ensino Fundamental sobre Estruturas Multiplicativas. *Perspectivas da Educação Matemática*, 10(24). <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/2930>

Tieppo, S. M. (2024). *Panorama das situações relacionadas à função afim em teses e dissertações brasileiras* [Tese, Universidade Estadual do Oeste do Paraná]. <https://tede.unioeste.br/handle/tede/7158>

Tieppo, S. M., Cappelin, A., Zanatta, L. F., Nogueira, C. M. I., & Rezende, V. (2023). Um panorama de situações do tipo misto em provas do Exame Nacional do Ensino Médio. *Ciência & Educação (Bauru)*, 29. <https://doi.org/10.1590/1516-731320230009>

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and Developmental Psychology and Research in Mathematics Education: Some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics*, 3(2). <https://flm-journal.org/Articles/55FB50C29A82BFB73E20A186E102.pdf>

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2). [https://gerardvergnaud.wordpress.com/wp-content/uploads/2021/09/gvergnaud\\_1990\\_theorie-champs-conceptuels\\_recherche-didactique-mathematiques-10-2-3.pdf?utm\\_source=chatgpt.com](https://gerardvergnaud.wordpress.com/wp-content/uploads/2021/09/gvergnaud_1990_theorie-champs-conceptuels_recherche-didactique-mathematiques-10-2-3.pdf?utm_source=chatgpt.com)

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos Campos Conceituais. *Anais, Seminário Internacional de Educação Matemática, Rio de Janeiro*, 1–27.

Vergnaud, G. (1996). A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. *Revista do GEEMPA*, 9–19.

Vergnaud, G. (2003). A gênese dos Campos Conceituais. Em GROSSI, E. P. (Org.), *Por que ainda há quem não aprende?* (2ª ed., p. 21–64). Vozes.

Vergnaud, G. (2009a). *A criança, a matemática e a realidade* (M. L. F. Moro & M. T. C. Soares, Trans.; 3ª ed.). Ed. da UFPR.

Vergnaud, G. (2009b). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development*, 52. [https://www.gerard-vergnaud.org/texts/gvergnaud\\_2009\\_theory-conceptual-fields\\_human-development-52.pdf](https://www.gerard-vergnaud.org/texts/gvergnaud_2009_theory-conceptual-fields_human-development-52.pdf)

Vergnaud, G. (2011). O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. *Educar em Revista*, se1, 15–27. <https://doi.org/10.1590/S0104-40602011000400002>

Zanatta, L. F. (2024). *Formas operatória e predicativa relativas à função afim manifestadas por estudantes de Licenciatura em Matemática* [Dissertação, Universidade Estadual do Paraná]. <https://repositorio.unespar.edu.br/handle/123456789/291>