

## MODELO DIDÁTICO-PRAXEOLÓGICO PARA USO DO TEOREMA CHINÊS DOS RESTOS: UMA ABORDAGEM COMPUTACIONAL

Diandra Chisa Tanaka <sup>1</sup>, Edvaldo Elias de Almeida Batista <sup>2</sup>, Edmo Fernandes Carvalho <sup>3</sup>, Jailson França dos Santos <sup>4</sup>

diandra.tanaka@ufob.edu.br <sup>1</sup>, edvaldo.batista@ufob.edu.br <sup>2</sup>, edmofc@ufba.br <sup>3</sup>, jailson.santos@ufob.edu.br <sup>4</sup>

<sup>1,2,4</sup> Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB. Rua da Prainha, nº 1326, Morada Nobre, Barreiras, Bahia, Brasil.

<sup>3</sup>Universidade Federal da Bahia-UFBA, Av. Reitor Miguel Calmon, s/n, Canela, Salvador, Bahia, Brasil. CEP: 40110-100

### Resumo

Este artigo parte da constatação de que o Teorema Chinês dos Restos (TCR) é pouco explorado na Educação Básica, apesar de seu potencial para a resolução de sistemas de congruências. Nesse contexto, coloca-se o seguinte problema: como estruturar uma proposta didática que favoreça a abordagem desse conteúdo em sala de aula com o apoio de tecnologias digitais? Diante disso, o objetivo deste artigo é discutir um modelo didático-praxeológico para o ensino do TCR em aulas de Matemática com mediação tecnológica. O modelo proposto se materializa na construção de um algoritmo para a resolução de sistemas de congruências lineares e na implementação de um programa computacional capaz de executar esse procedimento, gerando registros dos cálculos realizados. A proposição fundamenta-se na Teoria Antropológica do Didático, de Yves Chevallard, e configura-se como uma pesquisa de abordagem qualitativa, cujo método se apoia na etapa de concepção e análise *a priori* da Engenharia Didática. Os resultados indicam que o uso do algoritmo, aliado à mediação tecnológica, pode favorecer a compreensão e a interpretação de problemas envolvendo sistemas de congruências, ao mesmo tempo em que contribui para a organização dos procedimentos de resolução.

**Palavras-chave:** Modelo didático-praxeológico. Teorema Chinês do Resto. Ensino de congruências.

### Modelo didático praxeológico para el uso del Teorema Chino de los Restos: un enfoque computacional

### Resumen

Este artículo parte de la constatación de que el Teorema Chinês dos Restos es poco explorado en la Educación Básica, apesar de su potencial para una resolución de sistemas de congruências. Nesse contexto, coloca-se o seguinte problema: ¿cómo estructurar una propuesta didática que favoreça a abordar este conteúdo en sala de aula con o apoio de tecnologías digitais? Diante disso, el objetivo de este artículo es discutir un modelo didático-praxeológico para el aprendizaje de TCR en aulas de Matemática con mediación tecnológica. El modelo propuesto se materializa en la construcción de un algoritmo para la resolución de sistemas de congruências lineales y en la implementación de un programa computacional capaz de ejecutar ese procedimiento, generando registros de los cálculos realizados. A propuesta fundamenta-se na Teoria Antropológica do Didático, de Yves Chevallard, y configura-se como uma pesquisa de abordagem qualitativa, cujo método se apoia na etapa de concepção e análise *a priori* da Engenharia Didática. Los resultados indican que el uso del algoritmo, aliado de la mediación tecnológica, puede favorecer la comprensión y la interpretación de problemas relacionados con sistemas de congruência, al mismo tiempo que contribuyen a la organización de los procedimientos de resolución.

**Palabras clave:** Modelo didático-praxeológico. Teorema Chino de los Restos. Enseñanza de congruências.

# Didactic praxeological model for using the Chinese Remainder Theorem: a computational approach

## Abstract

This article is based on the confirmation that the Chinese Remainder Theorem is little explored in Basic Education, despite its potential for the resolution of congruence systems. Need context, position or following problem: how to structure a didactic proposal that favors the approach of content in the classroom with the support of digital technologies? Before saying, the objective of this article is to discuss a didactic-praxeological model for teaching CRT in Mathematics classrooms with technological media. The proposed model materializes in the construction of an algorithm for the resolution of linear congruence systems and in the implementation of a computer program capable of executing this procedure, generating records of the calculations carried out. The proposal is based on Yves Chevallard's Anthropological Teaching Theory, and is configured as a qualitative approach research, whose method is based on the conception and a priori analysis stage of Teaching Engineering. The results indicate that the use of the algorithm, allied to technological media, can favor the understanding and interpretation of problems involving congruence systems, at the same time as it contributes to the organization of two resolution procedures.

**Keywords:** Didactic Praxeological Model. Chinese Remainder Theorem. Teaching of Congruences.

## Modèle didactico-praxéologique pour l'utilisation du Théorème Chinois des Restes: une approche computationnelle

### Résumé

Cet article part du constat que le Théorème des Restes Chinois (TRC) est peu exploré dans l'enseignement fondamental, malgré son potentiel pour la résolution de systèmes de congruence. Il s'inscrit dans le contexte suivant : comment structurer une proposition didactique favorisant l'approche du contenu en classe grâce aux technologies numériques ? L'objectif de cet article est de présenter un modèle didactique et praxéologique pour l'enseignement du TRC en mathématiques, intégrant les outils numériques. Ce modèle se concrétise par la construction d'un algorithme de résolution de systèmes de congruence linéaire et par la mise en œuvre d'un programme informatique capable d'exécuter cette procédure et de générer des enregistrements des calculs effectués. La proposition s'appuie sur la théorie anthropologique de l'enseignement d'Yves Chevallard et adopte une approche qualitative, dont la méthode repose sur la conception et l'analyse a priori propres à l'ingénierie pédagogique. Les résultats indiquent que l'utilisation de l'algorithme, associée aux outils numériques, favorise la compréhension et l'interprétation des problèmes de systèmes de congruence, tout en contribuant à l'organisation de deux procédures de résolution.

**Mots clés:** Modèle didactico-praxéologique. Théorème Chinois des Restes. Enseignement des congruences.

## 1. INTRODUÇÃO

No contexto do ensino de Matemática na Educação Básica, observa-se que determinados conteúdos com potencial formativo significativo permanecem pouco explorados nos documentos curriculares e nas práticas escolares. Entre esses conteúdos, destacam-se aqueles relacionados à Teoria dos Números, especialmente no que se refere à resolução de problemas que envolvem regularidades e relações numéricas, os quais podem ampliar o repertório matemático dos estudantes e favorecer abordagens mais investigativas.

Nesse cenário, o Teorema Chinês dos Restos (TCR) constitui um resultado clássico da Teoria dos Números que permite determinar soluções de sistemas de congruências lineares com módulos coprimos dois a dois. Para compreender esse resultado, é importante considerar que a congruência módulo  $m$  ( $\equiv \text{mod } m$ ), com  $m$  inteiro e positivo, é uma relação de equivalência (reflexiva, simétrica, e transitiva) que classifica números inteiros de acordo com seus restos na divisão por  $m$  e, por sua vez, um sistema de congruências módulo  $m$  é composto por  $n$  destas

congruências. Nesse contexto, o TCR garante a existência e a unicidade de soluções para tais sistemas, além de fornecer um procedimento estruturado para sua resolução, o que evidencia seu potencial didático, especialmente em abordagens mediadas por tecnologias digitais.

No entanto, apesar de sua relevância matemática e potencial didático, o TCR não é explicitamente contemplado como objeto de conhecimento nos documentos orientadores da Educação Básica, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018). Essa ausência de explicitação não implica, necessariamente, sua inexistência nas práticas escolares, mas pode contribuir para que sua abordagem ocorra de forma pontual ou dependente de iniciativas individuais de professores.

Nesse contexto, a ausência de abordagens sistematizadas para o ensino do TCR reforça a necessidade de investigações que explorem suas potencialidades didáticas na Educação Básica. O estudo que resultou neste artigo volta-se ao TCR justamente por sua aplicabilidade na

resolução de sistemas de congruências, conteúdo que pode ser explorado desde o Ensino Médio.

Do ponto de vista das pesquisas em Educação Matemática, não foram identificados estudos que proponham modelos didáticos específicos para o ensino desse objeto à luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD), conforme desenvolvida por Chevallard (1999). Por outro lado, observa-se na literatura um movimento de proposição de modelos didáticos alternativos para diferentes objetos matemáticos. Nesse sentido, Almeida (2018) apresenta uma proposta alternativa para o ensino de probabilidade no Ensino Médio, enquanto Oliveira (2020) investiga o uso do GeoGebra na construção de um modelo didático para o estudo das funções seno e cosseno. De modo semelhante, Siqueira (2021) desenvolve um modelo didático de referência, fundamentado na TAD, para o ensino de cônicas na Educação Básica. Apesar dessas contribuições, tais estudos concentram-se em outros objetos do saber matemático, evidenciando uma lacuna no que se refere à elaboração de modelos didáticos voltados especificamente ao ensino do TCR.

Outrossim, são escassos os trabalhos que versam sobre o TCR, sendo que eles, na sua maioria, discutem somente o ensino desse conteúdo em contexto escolar ou sua aplicabilidade. Souto Filho (2015) escreveu sobre o histórico do teorema e apresentou-o, com a resolução de muitos exercícios. Nascimento (2014) propôs um minicurso com ênfase na resolução de problemas e aplicou-o para alunos do ensino médio, concluindo que, apesar da dificuldade com algumas nomenclaturas e simbologia, observou-se que o assunto motivou a aprendizagem, sendo útil na solução de vários exercícios. Glória (2019) apresentou o TCR, além de diversos exemplos e sugere que seu trabalho possa servir de base para alunos e professores que buscam atividades relacionadas com o tema. Com o mesmo intuito, Santos (2017) aborda assuntos importantes na revisão bibliográfica que embasam o teorema e resolve muitos exemplos. Bomfim (2021) ministrou para um grupo de alunos diversos assuntos, incluindo o TCR, e constatou que houve adesão por mais da metade dos estudantes, que utilizaram a ferramenta na resolução dos testes aplicados.

No que se refere às aplicações do TCR, a literatura aponta diferentes contextos nos quais esse resultado matemático é mobilizado. Entre eles, destaca-se a criptografia, entendida como um conjunto de técnicas voltadas à codificação e proteção de informações (Batista Filho, 2020), na qual o TCR pode ser utilizado para otimizar cálculos envolvendo grandes números. Outra aplicação relevante é a partilha de segredos ou de senhas (Prazeres, 2014), que consiste em distribuir uma informação sensível entre vários participantes, de modo que nenhum deles detenha a informação completa isoladamente, mas que um subconjunto desses participantes seja capaz de reconstruí-la. Em ambos os casos, o TCR atua como ferramenta matemática que garante a recomposição de informações a partir de resíduos, evidenciando seu potencial não apenas teórico, mas também aplicado.

Apesar das potencialidades matemáticas TCR, bem como de suas possibilidades de exploração em contextos de resolução de problemas, observa-se que estratégias alternativas para o tratamento de sistemas de congruências ainda aparecem de forma pouco recorrente nas práticas escolares. Tal cenário pode estar relacionado à maneira como determinados objetos matemáticos são tradicionalmente apresentados no ensino. Essa discussão pode ser compreendida à luz TAD, a qual investiga as relações estabelecidas entre os sujeitos, as instituições e os objetos do saber. No âmbito dessa teoria, os conhecimentos matemáticos são analisados a partir das praxeologias, compostas por tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias que legitimam determinadas práticas matemáticas (Chevallard, 1999).

Nestes termos, a depender da quantidade de congruências que compõem um sistema ou do seu nível de dificuldade, a resolução do problema pode se tornar pouco atrativa e, muitas vezes, exaustiva para o estudante. Nesse sentido, o desafio do professor consiste em selecionar estratégias didáticas que, ao mesmo tempo, evidenciem a razão de ser do objeto matemático em questão, compreendida, na perspectiva da TAD, como o conjunto de necessidades, problemas e práticas que justificam a existência e a utilização de um determinado saber em uma instituição e favoreçam uma aprendizagem significativa, distante do que D'Amore (2007) denomina de fraudes epistemológicas, isto é, situações em que se produz uma falsa impressão de aprendizagem baseada apenas na reprodução mecânica de modelos recorrentes nas práticas escolares.

A partir desse escopo, que evidencia uma problemática didática no ensino de congruências, formulamos a seguinte questão de pesquisa: *em que condições um modelo didático-praxeológico, fundamentado no Teorema Chinês dos Restos, pode ser proposto para o ensino de sistemas de congruências na Educação Básica?* Desse modo, objetivamos discutir a proposição de um modelo didático-praxeológico voltado ao ensino de sistemas de congruências, embasado no TCR, em uma abordagem computacional.

O método adotado neste estudo fundamenta-se na etapa de concepção e análise *a priori*, correspondente à segunda fase da Engenharia Didática (Artigue, 1988, 2020). Nessa etapa, foram elaboradas duas situações didáticas (Atividades 1 e 2), com o objetivo de estruturar um modelo teórico para o ensino do Teorema Chinês dos Restos. A análise *a priori* é compreendida, neste contexto, como um procedimento teórico de antecipação, por meio do qual antevemos os possíveis comportamentos, estratégias e dificuldades dos estudantes diante das tarefas propostas, considerando uma eventual experimentação mediada por tecnologias digitais na Educação Básica.

Desse modo, estruturamos este artigo em três blocos. No primeiro, apresentamos o referencial teórico e os aspectos metodológicos, o que nos permitiu compreender a problemática investigada e propor uma solução didática para dificuldades específicas dos estudantes relacionadas à resolução de sistemas de congruências. No segundo bloco, iniciamos, sem a pretensão de esgotar o tema, uma

discussão sobre o objeto do saber TCR e seu ensino em uma abordagem computacional. Para tanto, apresentamos o TCR, seus fundamentos matemáticos e um conjunto de tarefas que possibilitam sua utilização como ferramenta para a resolução de sistemas de congruências. No terceiro bloco, apresentamos os resultados e a discussão, com foco na explicitação do modelo didático-praxeológico proposto para o ensino e/ou estudo do TCR, o qual favorece a resolução de sistemas de congruências. Destacamos, por fim, a potencialidade desse teorema como objeto de ensino na Educação Básica, na medida em que pode tornar mais econômicos os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem, reduzindo o esforço algébrico e otimizando o tempo dedicado à resolução das tarefas.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO E ASPECTOS METODOLÓGICOS

Apresentamos e discutimos nessa seção noções teóricas da proposição de um modelo didático-praxeológico para a difusão na educação básica do TCR. Tais noções integram o campo da antropologia da didática (epistemologia experimental), mais especificamente propostas por Chevallard (1999) no seio da TAD.

O ponto fulcral da TAD é a noção de praxeologia matemática. Antes de abordá-la, contudo, é necessário destacar a noção de objeto, compreendida, no âmbito da TAD, como tudo aquilo que pode existir para um indivíduo ou instituição por meio das relações que com ele se estabelecem (Chevallard, 1999). No âmbito dos sistemas antropológicos, como é sistema didático, mediamos objetos do saber, e essa mediação em parte integra outra noção, a de atividade matemática, que segundo Chevallard (1999) é uma atividade humana como outra qualquer. Mas apesar de ter características comuns a outras atividades humanas, a praxeologia é um modelo que expressa as características da referida atividade. Assim, uma praxeologia matemática é um modelo composto por dois blocos, a saber: o técnico-prático e o do saber (Chevallard, 1999).

Dito isto, resolver um determinado sistema de congruências, usando como técnica o TCR, configura o bloco técnico-prático. Compreender os processos, as ferramentas matemáticas, e a teoria envolvida integram o bloco do saber. De acordo com Chevallard (1999), esses blocos devem ser indissociáveis.

Alguns problemas podem ser apontados no ensino de matemática de modo geral, mas a dissociação entre esses dois blocos apresentados na TAD de forma umbilical, é sem dúvida uma problemática importante a ser estudada. Para contextualizar tal preocupação, pensemos numa estrutura comum nos sistemas didáticos: o professor apresenta os aspectos teóricos do objeto do saber e depois, talvez em outras aulas, alguns exercícios que exploram as explicações teóricas. Esse exemplo mostra a ruptura indesejada entre os blocos que compõem a praxeologia matemática, e que pode ser razão para que os estudantes não toquem nos objetos dessa área de conhecimento, além de naturalizar o que D'Amore (2007) chamou de fraude epistemológica.

Ademais, a TAD também pode ser compreendida como um referencial metodológico, uma vez que, no âmbito de suas discussões teóricas, são desenvolvidas ferramentas voltadas à análise das organizações matemáticas e didáticas presentes nas práticas de ensino e aprendizagem. Nesse contexto, Chevallard (2013) propõe a noção de praxeologias de pesquisa, entendidas como formas de investigação que permitem analisar e modelizar práticas associadas a determinados objetos do saber.

No presente estudo, a perspectiva metodológica adotada, sobretudo, a uma análise de natureza didática, orientada pela etapa de concepção e análise *a priori* da Engenharia Didática. Tal análise busca antever possíveis estratégias e comportamentos dos estudantes diante das situações propostas. Paralelamente, mobiliza-se uma análise praxeológica inspirada em Matheron (2000), com o objetivo de identificar e explicitar os tipos de tarefas, as técnicas, as tecnologias e os elementos teóricos envolvidos na atividade matemática associada ao TCR. Dessa forma, investigam-se tanto os aspectos prático-técnicos quanto os tecnológico-teóricos da organização matemática mobilizada no modelo didático proposto.

O que compõem o modelo didático-praxeológico que estamos nos referindo ao longo deste artigo, são tarefas matemáticas que tem como fio condutor a exploração da noção de congruência e uma técnica específica, denominada de TCR. Mas o referido modelo tem um elemento que o diferencia de outros tantos análogos, baseados em tarefas que fazem uso de algoritmo computacional.

O recorte da pesquisa apresentado neste artigo caracteriza-se como um estudo de abordagem qualitativa, fundamentado nos pressupostos da Engenharia Didática, especialmente na etapa de concepção e análise *a priori*. Nessa perspectiva, foram elaboradas situações didáticas voltadas ao ensino de sistemas de congruências com base no TCR, mediadas por recursos computacionais. A etapa de concepção consistiu na elaboração e organização de tarefas matemáticas destinadas à exploração do TCR em contextos de resolução de problemas. Já a análise *a priori* teve como finalidade antever possíveis estratégias de resolução e comportamentos dos estudantes diante das situações propostas, considerando uma eventual aplicação em contextos da Educação Básica.

Para o desenvolvimento desta análise, utilizamos tarefas elaboradas e discutidas em Tanaka (2021), tomando-as como base para a construção do modelo didático-praxeológico aqui proposto. Além disso, realizamos uma análise praxeológica fundamentada em Chevallard (1999) e Matheron (2000), buscando identificar os tipos de tarefas, bem como os elementos tecnológico-teóricos que sustentam a atividade matemática relacionada ao TCR.

## 3. TEOREMA CHINÊS DOS RESTOS

A discussão em torno do objeto do saber TCR, se sustenta na tentativa de tornar mais econômico do ponto de vista cognitivo, o trabalho dos estudantes em torno de problemas

que envolvem a noção de congruência, especialmente na resolução de sistemas de congruências.

Para Matkovic (1988), o registro mais antigo do TCR é do matemático chinês Sun-Tsu, provavelmente no século IV d.C. Esse matemático, na sua obra *Aritmética Clássica*, relata no seu terceiro volume, o problema de número 26, que pode ser assim enunciado com adaptações típicas de uma tradução:

**Sun-Tsu problema 26:** *Temos um número desconhecido de objetos; se os contarmos de três em três, o resto é dois; se os contarmos de cinco em cinco, o resto é três; se os contarmos de sete em sete, o resto é dois. Quantos são os objetos?*

A resposta ao problema é dada em seguida, acompanhada de uma descrição do método (técnica) utilizado.

“Se contá-los de três em três e deixar dois, tome 140. Se contá-los de cinco em cinco e deixar três, tome 63. Se contá-los de sete em sete e deixar resto dois, tome 30. Adicione estes números e obterá 233. Disto, subtraia 210 e terá o resultado. Para cada unidade que sobra quando se conta de três em três, considere 70. Para cada unidade que sobra quando se conta de cinco em cinco, considere 21. Para cada unidade que sobra quando se conta de sete em sete, considere 15. Se a soma for 106 ou mais, subtraia 105 e obterá o resultado” (Chang; Muller, 1980, p. 545, tradução nossa).

No exemplo, tem-se  $140 + 63 + 30 = 233$ . Daí, subtraia a multiplicação de 2 por  $105 = 210$  e encontrará 23 como resultado.

De forma algébrica, este problema pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{cases} N \equiv 2 \pmod{3} \\ N \equiv 3 \pmod{5} \\ N \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

cuja solução é:

$$\begin{cases} 70 \equiv 1 \pmod{3} \\ 21 \equiv 1 \pmod{5} \\ 15 \equiv 1 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 140 \equiv 2 \pmod{3} \\ 63 \equiv 3 \pmod{5} \\ 30 \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

$$N \equiv 140 + 63 + 30 - n \cdot 105 \equiv 23 \pmod{105}$$

Por meio desse problema, estabelece-se a razão de ser do TCR, entendida, na perspectiva da TAD, como o conjunto de necessidades e problemas que justificam a existência e a utilização de um determinado objeto matemático. Nesse caso, o TCR emerge da necessidade de encontrar soluções para problemas envolvendo sistemas de congruências simultâneas, evidenciando sua funcionalidade como ferramenta matemática para resolução desse tipo de situação.

Vale destacar que sistemas dessa natureza admitem infinitas soluções inteiras, expressas, em geral, por uma classe de equivalência da forma  $x = R + k.Z$ , em que  $R$  representa uma solução particular do sistema,  $Z$

corresponde ao produto dos módulos envolvidos e  $k \in \mathbb{Z}$ . No problema atribuído a Sun-Tsu, buscava-se especificamente a menor solução inteira positiva do sistema. Por essa razão, consideramos o menor inteiro pertencente à classe de soluções obtida, a saber: o conjunto dos números inteiros que deixa resto 23 na divisão por 105, o que significa a solução apresentada no problema. Além disso, os registros históricos associados ao problema de Sun-Tsu concentram-se na apresentação de procedimentos para obtenção de soluções particulares de sistemas de congruências, sem desenvolver uma formulação geral do teorema ou demonstrações formais.

#### 4. RESULTADO E DISCUSSÃO

Uma expectativa institucional não convencional, haja vista que esse saber não integra explicitamente as orientações curriculares da Educação Básica, para a abordagem do TCR é que o futuro docente utilize tanto a linguagem natural quanto a linguagem matemática, fazendo uso de objetos gráficos e algébricos. Esses objetos correspondem a representações matemáticas acessíveis pelas experiências sensoriais.

Por outro lado, os objetos não ostensivos situam-se no campo das ideias, envolvendo conceitos e noções que exigem abstração (Bosch e Chevallard, 1999). Assim, a ideia de congruência constitui um objeto não ostensivo, enquanto equações e a própria linguagem natural podem funcionar como objetos ostensivos que representam essa ideia matemática.

Tais noções auxiliam, por exemplo, na compreensão dos elementos que compõem uma técnica não padrão para a resolução de problemas do tipo:

**Problema** - *Supondo que um general inicia uma batalha com 2000 soldados e, ao seu término, ele precise verificar quantos homens não retornaram. Com esse propósito, ele alinha os soldados em colunas de 7, sobrando 5 deles. Quando os organiza em grupos de 9, restam 4. E quando os alinha em grupos de 10, sobra apenas 1. Sabendo que retornaram mais de 1500 indivíduos dessa batalha, quantos sobreviveram e quantos morreram?*

A partir do problema apresentado acima, deduzimos a Tarefa proposta na forma:

**Tarefa** - *Determinar a quantidade de soldados que sobreviveram e que morreram, a partir da resolução de um sistema.*

Observamos que nem o problema, nem a Tarefa, induzem quanto à técnica que deve ser utilizada para solução. Quando nos referimos ao método, na linguagem da TAD, nos referimos à técnica, completando assim o bloco técnico-prático de uma praxeologia.

##### 4.1. Discurso que justifica a técnica

Para solucionar problemas dessa natureza, pode-se recorrer aos conhecimentos relacionados às congruências e aos sistemas de congruências. Nesse contexto, o TCR

configura-se como uma ferramenta matemática relevante, por propor um procedimento alternativo para a determinação de soluções desses sistemas.

No âmbito da análise *a priori* desenvolvida, consideramos a possibilidade de que a técnica fundamentada no TCR seja percebida pelos estudantes como uma técnica não padrão, isto é, uma estratégia de resolução pouco recorrente nas práticas escolares habituais e, frequentemente, ausente dos manuais didáticos ou das abordagens convencionais em sala de aula. Tal hipótese decorre do fato de que o ensino de sistemas de congruências, quando presente na Educação Básica, tende a privilegiar procedimentos algébricos mais, o que pode influenciar as estratégias inicialmente mobilizadas pelos estudantes diante das tarefas propostas. Assim, ao enunciar o TCR, buscamos ampliar a compreensão do bloco técnico-prático da praxeologia matemática anteriormente mencionada, explicitando uma técnica alternativa de resolução e os procedimentos que a constituem.

TCR: Considere um sistema  $x \equiv a_i \pmod{m_i}$  com  $i = 1, \dots, n$ . Para que tal sistema possua solução, é suficiente que  $m_i$  e  $m_j$  sejam primos entre si, isto é,  $\text{mdc}(m_i, m_j) = 1$ , para todo  $i \neq j$ . Neste caso, a solução  $R \in \{0, 1, \dots, m_1 m_2 \dots m_n - 1\}$  do sistema é única módulo  $Z = m_1 m_2 \dots m_n$  e temos:

$$R \equiv S \equiv a_1 x_1 y_1 + \dots + a_n x_n y_n \equiv a_1 w_1 y_1 + \dots + a_n w_n y_n \pmod{Z},$$

onde  $w_i \equiv x_i \pmod{m_i}$  com  $w_i \in \{0, 1, \dots, m_i - 1\}$ ,  $x_i = Z \cdot m_i^{-1}$  e  $y_i$  a solução de  $x_i y_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Uma demonstração deste teorema, pode ser encontrada em Santos (2020).

#### 4.2. Proposta de um algoritmo computacional para resolução de sistemas de congruências pelo método do TCR

Nessa seção, apresentamos uma proposta de algoritmo para a resolução de sistemas de congruências. Apesar do uso de linguagem de programação para resolução desse tipo de sistema, o processo não se torna automático para o estudante. Aqui pode-se falar de dois caminhos que viabilizam a aprendizagem de saberes matemáticos. O primeiro, o aprender matemática via linguagem de programação, e o segundo, aprender matemática por meio do uso de situações que exploram tecnologias digitais, tais como, *softwares* e/ou aplicativos.

Outrossim, o trabalho cognitivo no processo de resolução de sistemas como o mencionado anteriormente, é amplificado, ou seja, mostra-se uma provável progressão da aprendizagem, justamente pelos processos cognitivos indicados por exemplo, pelos verbos da tarefa. Nesse sentido, reconhecer um sistema é um processo mais econômico, do ponto de vista cognitivo, que aplicar um teorema para resolver este sistema.

Ademais, o uso de algoritmos como o apresentado neste artigo também dialoga com as orientações da Base

Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), especialmente no que se refere à incorporação de recursos tecnológicos nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Embora os sistemas de congruências não sejam explicitamente abordados como objeto de conhecimento na Educação Básica, ideias relacionadas à aritmética dos restos aparecem de forma implícita em conteúdos associados às operações com números inteiros e divisibilidade.

Esses conhecimentos são mobilizados, por exemplo, em avaliações externas como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), especialmente nos anos finais do Ensino Fundamental, em habilidades relacionadas à resolução de problemas envolvendo divisibilidade, múltiplos, padrões numéricos e regularidades aritméticas. Nesse sentido, a abordagem do TCR pode contribuir para ampliar e aprofundar a compreensão desses conceitos, articulando-os a estratégias matemáticas e computacionais de resolução de problemas.

Na Figura 1, é apresentado um fluxograma que detalha os passos para construção do algoritmo do TCR. Para que o programa executável seja iniciado, é solicitado do usuário a inserção dos dados do problema a ser resolvido. Primeiro, deve-se informar o número  $n$  de equações do sistema e, em seguida, os restos  $a_1, \dots, a_n$  das divisões do número procurado  $x$  pelos respectivos módulos  $m_1, \dots, m_n$ . Por fim, respeitando a mesma ordem dos restos, são solicitados os valores de  $m_1, \dots, m_n$ .

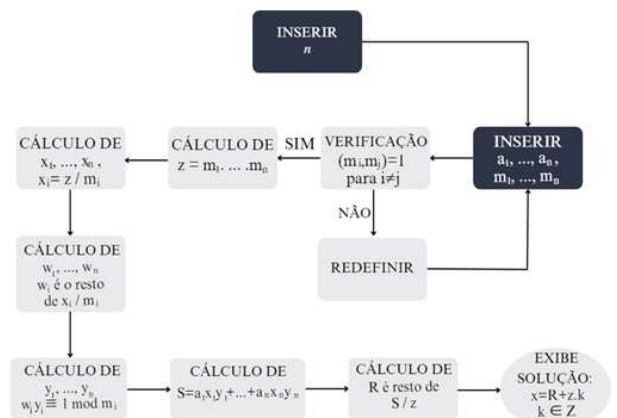


Figura 1 – Fluxograma para resolução de sistemas de congruências pelo Teorema Chinês dos Restos.

Em posse dos dados de entrada, é válido ressaltar que, antes mesmo de iniciar o processo de resolução, é feita uma verificação da validade das hipóteses do TCR pelo programa fonte, ou seja, é verificado se os números atribuídos  $m_1, \dots, m_n$  são primos entre si. Caso estes números não atendam a esta condição, o programa executável é interrompido. Assim, o usuário pode retornar ao programa e digitar novamente os dados do sistema de congruências até que as hipóteses do teorema estejam satisfeitas.

Após a verificação do teste de hipótese, o programa fonte calcula  $z$  como o produto de todos os  $m_1, \dots, m_n$

informados e, em seguida, calcula os auxiliares  $x_1, \dots, x_n$  pela divisão de  $z$  por  $m_1, \dots, m_n$ , respectivamente. Posteriormente, o algoritmo calcula os auxiliares  $w_1, \dots, w_n$  pelo resto da divisão de  $x_1, \dots, x_n$  por  $m_1, \dots, m_n$ . Em seguida, o algoritmo calcula  $y_1, \dots, y_n$  como o elemento inverso multiplicativo de  $w_1, \dots, w_n$  módulo  $m_1, \dots, m_n$ . No passo seguinte, calcula-se a soma  $S$  dos produtos de fatores  $a_i, x_i, y_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Finalmente, o algoritmo calcula o resultado  $R$  pelo resto da divisão de  $S$  módulo  $z$  e exibe na tela do usuário todas as soluções inteiras do problema, ou seja, todos os valores inteiros que  $x$  pode assumir cômputos a  $R$  módulo  $z$ .

Com base no fluxograma mostrado na Figura 1, é apresentado, a seguir, o programa fonte (Algoritmo 1) que detalha os passos computacionais que podem ser seguidos para a construção do programa computacional do TCR.

---

#### Algoritmo 1: Teorema Chinês dos Restos

---

```

1:  Entrada:  $n, \vec{a}, \vec{m}$ 
2:  para  $i$  de 0 até  $n-1$  faça
3:    saída:  $x$  congruente  $a(i+1)$  mod  $m(i+1)$ 
4:  fim para
5:   $mdc = 0$ 
6:  para  $i$  de 0 até  $n-1$  faça
7:    para  $j$  de  $i+1$  até  $n-1$  faça
8:      se  $mdc(m[i], m[j]) \neq 1$  então
9:         $mdc = 1$ 
10:     fim se
11:   fim para
12: fim para
13: se  $mdc == 1$  então
14:   saída: Os dados inseridos não atendem às condições
      para o TCR
15: parar
16: fim se
17: para  $i$  de 0 até  $n-1$  faça
18:   saída: " $x$  congruente  $a[i]$  mod  $m[i]$ "
19: fim para
20:  $z = \text{produto}(m)$ 
21: para  $i$  de 0 até  $n-1$  faça
22:    $x[i] \leftarrow z // m[i]$ 
23:   saída: " $x(i+1) =$ ",  $x[i]$ 
24: fim para
25: para  $i$  de 0 até  $n-1$  faça
26:    $w[i] \leftarrow x[i] \% m[i]$ 
27:   saída: " $w(i+1) =$ ",  $w[i]$ 
28: fim para
29: para  $i$  de 0 até  $n-1$  faça
30:   para  $j$  de 1 até  $m[i]-1$  faça
31:     se  $(w[i] * j) \% m[i] == 1$  então
32:        $y[i] = j$ 
33:     sair do loop
34:   fim se
35: fim para
36: saída: " $y(i+1) =$ ",  $y[i]$ 
37: fim para
38:  $s \leftarrow a[0] * x[0] * y[0]$ 
39: para  $i$  de 1 até  $n-1$  faça
40:  $s \leftarrow s + a[i] * x[i] * y[i]$ 
41: fim para
42:  $r \leftarrow s \% z$ 
43: fim

```

---

Vale destacar que o algoritmo constitui parte do modelo didático proposto para o ensino da resolução de sistemas de congruências. Do mesmo modo, é importante salientar que, da forma como se apresenta, sua utilização demanda adaptações didáticas, uma vez que esse objeto do saber não é explicitamente prescrito nos documentos curriculares orientadores e, conseqüentemente, nem sempre se faz presente nos currículos das diferentes redes de ensino. Nesse sentido, o que propomos é a ampliação das possibilidades didáticas para a abordagem de situações envolvendo congruências na Educação Básica, evidenciando a viabilidade de explorar esse conteúdo por meio de estratégias computacionais articuladas ao ensino de Matemática.

Questões como “por que utilizar esse modelo?”, “em que etapa da Educação Básica ele pode ser explorado?” e “qual deve ser o papel do estudante diante do algoritmo e dos recursos computacionais?” constituem problematizações relevantes para a compreensão da função didática da proposta apresentada neste estudo.

No que se refere à sua inserção na Educação Básica, entendemos que o modelo didático proposto pode ser explorado, sobretudo, no Ensino Médio, especialmente em contextos de conteúdos relacionados à divisibilidade, aritmética modular, padrões numéricos e resolução de problemas. Embora o TCR não integre explicitamente os currículos escolares, os conhecimentos mobilizados por ele dialogam com conceitos matemáticos já presentes nessa etapa de ensino.

Quanto ao papel do algoritmo, não se trata apenas de automatizar cálculos ou substituir a atividade matemática do estudante. Sua função didática consiste em favorecer a compreensão dos procedimentos envolvidos na resolução de sistemas de congruências, permitindo que os estudantes concentrem maior atenção na interpretação dos problemas, na análise das estratégias utilizadas e nas relações matemáticas mobilizadas durante o processo de resolução.

Além disso, o uso de recursos computacionais pode ocorrer em diferentes níveis de interação pedagógica: tanto por meio da utilização de programas previamente implementados quanto pela participação dos estudantes na construção ou adaptação de algoritmos simples, a depender dos objetivos didáticos definidos pelo professor e das condições institucionais de ensino.

### 4.3. Atividades analisadas

Na proposição do modelo didático para o ensino de sistemas de congruências, considera-se que o processo cognitivo envolvido na resolução desses sistemas pode se tornar mais econômico, no sentido de demandar menor esforço operacional repetitivo e possibilitar uma melhor gestão dos procedimentos algébricos mobilizados durante a resolução. Tal economia cognitiva significa possibilidade de reduzir a sobrecarga associada a cálculos extensos e repetitivos, permitindo que os estudantes concentrem maior atenção na compreensão conceitual do problema e nas estratégias de resolução adotadas.

Para isso, é necessário que o estudante compreenda a natureza do objeto matemático em questão, reconhecendo que se trata de um sistema de congruências, identificando suas características, seus módulos e suas variáveis. A partir dessa compreensão e da instrumentalização necessária para o uso do software, torna-se possível utilizar o algoritmo como ferramenta de apoio à resolução dos sistemas propostos.

Na sequência, apresentamos dois exemplos de sistemas de congruências resolvidos por meio do algoritmo descrito anteriormente.

**Atividade 1** – A partir do problema 26 de Sun-Tsu apresentado anteriormente, podemos extrair o sistema de congruências:

$$\begin{cases} N \equiv 2 \pmod{3} \\ N \equiv 3 \pmod{5} \\ N \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

Determinar as soluções do sistema.

Estas informações são passadas como parâmetros de entrada para o programa fonte, e os resultados obtidos são mostrados nas Figuras 2 e 3. Na Figura 2 é apresentado o sistema de entrada do programa executável, no qual é solicitado ao usuário o tamanho do sistema de congruência, como mostrado na linha 1 da Figura 2. Neste caso, foi digitado o tamanho 3. Em seguida são solicitados os valores que comporão o sistema de congruências, como é mostrado entre as linhas 6 e 11. Observa-se que os valores são, para o conjunto  $a = 2, 3, 2$ , e para o conjunto  $m = 3, 5, 7$ .

```

1:  Quantas congruências tem o sistema: 3
2:  O sistema de congruências será:
3:  x congruente a(1) mod m(1)
4:  x congruente a(2) mod m(2)
5:  x congruente a(3) mod m(3)

6:  Digite a(1): 2
7:  Digite a(2): 3
8:  Digite a(3): 2
9:  Digite m(1): 3
10: Digite m(2): 5
11: Digite m(3): 7

12: Resolverei o sistema de congruências:
13: x congruente 2 mod 3
14: x congruente 3 mod 5
15: x congruente 2 mod 7

```

**Figura 2** - Programa executável desenvolvido para atividade 1, seção de entrada para cálculo do TCR.

```

1: Resolverei o sistema de congruências:
2: x congruente 2 mod 3
3: x congruente 3 mod 5
4: x congruente 2 mod 7

5: CÁLCULO DE VARIÁVEIS:
6: z = 105
7: x(1) = 35; x(2) = 21; x(3) = 15;
8: w(1) = 2; w(2) = 1; w(3) = 1;
9: y(1) = 2; y(2) = 1; y(3) = 1;
10:
11: S=233
12:
13: Solução:
14:
15: x = 23+105.k, onde k pertence aos
    inteiros
16: Ou x congruente 23 mod 105

```

Na Figura 3 é calculado e apresentado o valor de  $Z$  como mostrado na linha 1, em seguida são mostrados os valores de  $x_i, w_i$  e  $y_i$ , nas linhas 7 a 9, a solução  $S$  na linha 11, e por fim, a equação geral que representa todos os possíveis valores congruentes a  $x$ , como é verificado na linha 15. Nota-se que os resultados obtidos são os mesmos de quando o problema é resolvido de forma manual, mas com a vantagem de ser rapidamente solucionado pelo programa executável. Deste modo, o esforço cognitivo do estudante é deslocado para a interpretação do problema e para a habilidade de reconhecer que se trata de uma situação que aborda sistemas de congruência.

**Figura 3** - Programa executável desenvolvido para atividade 1, seção de saída do cálculo do TCR.

**Atividade 2** – Considere o sistema de congruência como apresentado abaixo:

$$\begin{cases} N \equiv 1 \pmod{5} \\ N \equiv 2 \pmod{7} \\ N \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$$

Determinar as soluções do sistema.

Como 5, 7, 11 são primos entre si, o sistema tem solução. Portanto, iniciamos o processo com o cálculo de  $z$ :

$$z = 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$$

Cálculo de  $x_1, x_2, x_3$ :

$$x_1 = \frac{385}{5} = 77; x_2 = \frac{385}{7} = 55; x_3 = \frac{385}{11} = 35$$

Cálculo de  $w_1, w_2, w_3$ :

$$w_1 \equiv 77 \pmod{5} \Rightarrow w_1 = 2$$

$$w_2 \equiv 55 \pmod{7} \Rightarrow w_2 = 6$$

$$w_3 \equiv 35 \pmod{11} \Rightarrow w_3 = 2.$$

Cálculo de  $y_1, y_2, y_3$ :

$$77y_1 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 3$$

$$55y_2 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 6$$

$$35y_3 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 6.$$

O próximo passo é realizar o cálculo dos valores de  $S$ .

$$S = 1 \cdot 77 \cdot 3 + 2 \cdot 55 \cdot 6 + 3 \cdot 35 \cdot 6$$

$$1521 \equiv 366 \pmod{385}$$

Dessa forma, tem-se que 366 é uma solução e qualquer outra solução é da forma:

$$x = 366 + 385k, k \in \mathbb{Z}$$

Nas Figuras 4 e 5 são apresentados os resultados calculados através do programa executável desenvolvido. Observe que os resultados mostrados nas Figuras condizem perfeitamente com os calculados manualmente logo acima.

```

1:  Quantas congruências tem o sistema: 3
2:  O sistema de congruências será:
3:  x congruente a(1) mod m(1)
4:  x congruente a(2) mod m(2)
5:  x congruente a(3) mod m(3)

6:  Digite a(1): 1
7:  Digite a(2): 2
8:  Digite a(3): 3
9:  Digite m(1): 5
10: Digite m(2): 7
11: Digite m(3): 11

12: Resolverei o sistema de congruências:
13: x congruente 1 mod 5
14: x congruente 2 mod 7
15: x congruente 3 mod 11

```

**Figura 4** - Programa executável desenvolvido para atividade 2, seção de entrada para cálculo do TCR.

```

1:  Resolverei o sistema de congruências:
2:  x congruente 1 mod 5
3:  x congruente 2 mod 7
4:  x congruente 3 mod 11

5:  CÁLCULO DE VARIÁVEIS:
6:  z = 385
7:  x(1) = 77; x(2) = 55; x(3) = 35;
8:  w(1) = 2; w(2) = 6; w(3) = 2;
9:  y(1) = 3; y(2) = 6; y(3) = 6;
10:
11: S=1521
12:
13: Solução:
14:
15: x = 366+385.k, onde k pertence aos
    inteiros
16: Ou x congruente 366 mod 385

```

**Figura 5** - Programa executável desenvolvido para atividade 2, seção de saída do cálculo do TCR.

Há que se refletir, sobre o objetivo do ensino de matemática, isso porque ao apresentarmos o programa para resolução de sistemas de congruência como uma ferramenta que agiliza os procedimentos matemáticos na busca por solução, podemos enviesar o objetivo do referido ensino para a competência técnica. E tal reflexão nos conduz a outra: como a utilização de softwares para ensinar conteúdos matemáticos contribuem para aprendizagem sobre o processo de resolução?

Em um esboço de Análise Praxeológica, conforme proposto por Matheron (2000), pode-se considerar que a tarefa, nas Atividades I e II, consiste em resolver sistemas de congruências. Nesse contexto, a técnica matemática mobilizada refere-se aos procedimentos fundamentados no TCR, utilizados para determinar a solução dos sistemas

propostos. O uso do programa computacional, por sua vez, constitui um instrumento de mediação que operacionaliza e auxilia a execução desses procedimentos. Assim, ao inserir no programa os valores correspondentes às congruências do sistema, o estudante mobiliza uma organização matemática previamente estruturada pelo algoritmo fundamentado no TCR.

No que se refere ao bloco tecnológico-teórico da praxeologia, o discurso que justifica a técnica apoia-se nos conceitos de congruência modular e no próprio TCR, responsáveis por fundamentar matematicamente os procedimentos utilizados na resolução dos sistemas. O objetivo desse tipo de análise consiste em evidenciar características da atividade matemática desenvolvida em uma determinada instituição, como a sala de aula ou o componente curricular, buscando compreender como tarefas e justificativas teóricas se articulam nas práticas de ensino e aprendizagem.

A partir desse esboço de análise praxeológica, observa-se que o modelo didático proposto apresenta uma dimensão pragmática, na medida em que envolve a mobilização de conhecimentos matemáticos articulados a recursos computacionais para a resolução de problemas (Santos; Santos, Alves, 2026). Contudo, essa dimensão não se reduz a um simples saber-fazer operacional. Ao contrário, busca-se preservar a articulação entre o bloco prático-técnico e o bloco tecnológico-teórico da praxeologia, de modo que os procedimentos mobilizados pelos estudantes sejam acompanhados de compreensões conceituais que justifiquem e deem sentido às técnicas utilizadas.

É nesse sentido que talvez o processo de programar, seja capaz de alterar a prática do estudante a medida em que requisite antes saber ou ao menos pensar na modelagem do sistema, da sua resolução para essas habilidades serem base para a programação.

No que se refere à discussão sobre o lugar e a função dos sistemas de congruências na Educação Básica, destacamos, sem a pretensão de aprofundar essa temática, que a BNCC não contempla esse objeto do conhecimento. Entretanto, essa ausência não impede sua inserção em situações matemáticas voltadas ao Ensino Médio. Nessa perspectiva, a abordagem de sistemas de congruências, articulada ao uso de recursos computacionais, pode contribuir para tornar mais econômico o trabalho cognitivo do estudante, ao reduzir a sobrecarga de cálculos repetitivos e favorecer maior atenção à compreensão e interpretação dos problemas matemáticos envolvidos.

## 5. CONCLUSÃO

Objetivamos, neste artigo, discutir a proposição de um modelo didático-praxeológico voltado ao ensino de sistemas de congruências, embasado no TCR, em uma abordagem computacional. Isso foi realizado por meio da discussão de um problema clássico e atividades 1 e 2. Sua solução foi pautada em um sistema de congruências, modelado a partir do enunciado do referido problema.

Apesar de não haver prescrições explícitas na BNCC para o ensino de sistemas de congruências, a proposta discutida neste artigo, evidencia possibilidades de inserção desse conteúdo nas práticas escolares da Educação Básica. Tal possibilidade se sustenta, sobretudo, na presença de conteúdos relacionados à aritmética dos restos, divisibilidade e padrões numéricos, em contextos de resolução de problemas e raciocínio algébrico.

Além disso, avaliações externas, SAEB, mobilizam habilidades relacionadas a esses conhecimentos, o que permite compreender tais conteúdos como uma base conceitual relevante para abordagens mais avançadas envolvendo congruências. Nesse sentido, a proposta discutida neste estudo busca evidenciar possibilidades didáticas para a ampliação dessas ideias matemáticas por meio de estratégias fundamentadas no TCR e mediadas por recursos computacionais.

Mostramos com a apresentação do algoritmo do programa para resolução de sistemas de congruência, que o modelo didático-praxeológico é viável à medida em que torna o processo de resolução desse tipo de sistema mais econômico do ponto de vista cognitivo, destacando-se que o programa computacional proposto não resolve o problema matemático, mas facilita o trabalho de calcular sistemas, especialmente se esses tiverem um número elevado de equações.

No que se refere ao método utilizado neste artigo, a análise *a priori* do modelo didático permitiu antecipar potencialidades e limitações relacionadas à sua utilização em contextos de ensino. Entre as potencialidades identificadas, destaca-se a possibilidade de o programa computacional voltado à resolução de sistemas de congruências favorecer o deslocamento do foco dos estudantes dos cálculos operacionais repetitivos para aspectos ligados à interpretação dos problemas, às estratégias de resolução e aos processos cognitivos envolvidos na compreensão das situações propostas. Por outro lado, a análise também evidenciou possíveis restrições à implementação do modelo, especialmente no que se refere ao uso de algoritmos computacionais em sala de aula, considerando fatores como as condições institucionais de acesso às tecnologias digitais e a familiaridade de professores e estudantes com essas ferramentas.

No entanto, o uso do programa executável suscita questões relevantes que podem orientar investigações futuras, tais como: quais mudanças nas práticas de professores e estudantes podem emergir a partir da utilização desse recurso em aulas de Matemática? Em que medida seu uso pode favorecer a aprendizagem do TCR? Além disso, permanece a questão sobre se sua potencialidade didática reside apenas na exploração do software como ferramenta de apoio à resolução de problemas ou também na possibilidade de articular o ensino de Matemática à linguagem de programação.

Desse modo, o principal caminho que o estudo apresentado neste artigo aponta é para a experimentação do referido modelo, que pode trazer respostas mais conclusivas sobre o

papel de programas computacionais na aprendizagem de saberes não prescritos explicitamente em documentos curriculares, como é o caso do TCR. Além disso, a proposta discutida pode contribuir para ampliar o repertório didático de professores de Matemática, especialmente no Ensino Médio, ao apresentar possibilidades de articulação entre resolução de problemas, tecnologias digitais e conceitos relacionados à aritmética modular e aos sistemas de congruências.

## 6. REFERÊNCIAS

Almeida, C. M. C. (2018). *Um Modelo Didático De Referência Para O Ensino De Probabilidade*. Dissertação (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) - Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Salvador.

Artigue, M. Ingénierie didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 9(3), 281–308, 1988. Disponível em: <https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/>. Acesso em: 20 de mar. 2026.

Artigue, M. Didactic engineering in mathematics education. In: *Encyclopedia of mathematics education*. Cham: Springer International Publishing, 2020. p. 202-206. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0\\_44](https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_44)

Batista Júnior, C. C. (2020). *O Teorema Chinês dos Restos: uma abordagem voltada para olimpíadas de Matemática com aplicações em Criptografia RSA*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

Bomfim, L. S. (2021). *Subsunções para Resolução de Problemas de Divisão de Números Inteiros: o Caso do Teorema Chinês do Resto*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá.

Bosch, M.; Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité aux ostensifs dans mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions, 19 (1), 77 – 124. Disponível em: [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite\\_aux\\_ostensifs.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf). Acesso em: 17 mar. 2024.

Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília.

Chang, I.-C.; Muller, P. (1980). The Ancient Chinese Pearl in number theory-the Chinese remainder theorem. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology*, London, 11 (4), 545-556.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19, (2), 221-266. Disponível

em: [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse\\_des\\_pratiques\\_enseignantes.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf). Acesso em: 02 Dez. 2023.

Chevallard, Y. (2010). OÙ va la didactique ? Perspectives depuis et avec la TAD. In: 2e congrès international de la Théorie Anthropologique du Didactique. 2010, Montpellier. *Annales...* França: IUFM de l'académie de Montpellier. 923-948.

Chevallard, Y. (2013). Sobre a Teoria da Transposição Didática: algumas considerações introdutórias. *Revista de Educação Ciências e Matemática*, Rio de Janeiro, 3 (2), 1-14.

D'amore, B. (2007). *Elementos de didática da matemática*. [tradução Maria Cristina Bonomi]. 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Glória, W. da S. (2019). *Teorema Chinês dos Restos: Ensino e Aplicações*. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus.

Matheron, Y. (2000). Analyser les praxéologies quelques exemples d'organisations mathématiques. *IREM d'Aix-Marseille*, Marseille, 54, 51-78. (hal-04956174).

Matkovic, D. J. (1988). The Chinese Remainder Theorem: A Historical Account. *Pi Mu Epsilon Journal*, Worcester, 8 (8), 493-502. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/24339970>. Acesso em: 20 de mar. 2026.

Nascimento, A. S. (2014). *Teorema Chinês do Resto: Sua aplicação no ensino médio*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá.

Oliveira, E. S.S. (2020). *Estudo das Funções Seno e Cosseno por meio de um Modelo Didático Alternativo integrado ao GeoGebra*. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) - Faculdade de Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador.

Prazeres, S. B. dos. (2014). *O Teorema Chinês dos Restos e a Partilha de Senhas*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

Santos, A. dos. (2017). *Teorema Chinês dos Restos e Aplicações*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus.

Santos, J. P. de O. (2020). *Introdução à Teoria dos Números*. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA.

Santos, J. F. dos, Santos, M. B. Q. de C. P. dos, & Alves, F. R. V. (2026). Programação Python e Ensino de Matemática: Uma Proposta Interdisciplinar com Engenharia Didática. *Paradigma*, 47(1), e2026004. DOI: [doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2026.e2026004.id1761](https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2026.e2026004.id1761)

Siqueira, C. A. F. D. (2021). *Um modelo didático de referência baseado em atividades de estudo e investigação para o ensino de cônicas na escola básica*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Souto Filho, A. L. de. (2015). *O Teorema Chinês dos Restos*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Maranhão, São Luís.

Tanaka, D. C. (2021). *Teorema chinês dos restos: uma proposta de abordagem teórica com implementação computacional*. 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias, Universidade Federal do Oeste da Bahia.

## APÊNDICE A

Neste apêndice é mostrado o programa fonte do algoritmo computacional desenvolvido para resolver sistemas de congruência através do TCR. O algoritmo abaixo foi desenvolvido em linguagem computacional Python, e, portanto, pode ser utilizado em qualquer computador que tenha o interpretador Python instalado ou pode ser executado em nuvem.

```
1 import numpy as np
2
3 def main():
4     # Inicializando as variáveis
5     a, m, x, w, y = [], [], [], [], []
6     n = int(input("Quantas congruências tem o sistema: "))
7     print("\n\n0 sistema de congruências será:")
8     for i in range(n):
9         print(f"x congruente a{{i+1}} mod m{{i+1}}")
10    print("\n")
11    for i in range(n):
12        a.append(int(input(f"Digite a{{i+1}}: ")))
13    for i in range(n):
14        m.append(int(input(f"Digite m{{i+1}}: ")))
15
16    # Verificando se os valores de m são primos entre si
17    mdc = 0
18    for i in range(n):
19        for j in range(i+1, n):
20            if np.gcd(m[i], m[j]) != 1:
21                mdc = 1
22    if mdc == 1:
23        print("\n\n0s dados inseridos não atendem ao TCR")
24        print("0s valores de m não são primos entre si")
25        print("Tente novamente\n\n")
26        return
27
28    print("\n\nResolverei o sistema de congruências:")
29    for i in range(n):
30        print(f"x congruente {a[i]} mod {m[i]}")
31
32    # Calculando z
33    z = np.prod(m)
34    print(f"\n\n CÁLCULO DE VARIÁVEIS: \nz = {z}")
35    start = "\033[1m"
36    end = "\033[0;0m"
37    # Calculando x
38    for i in range(n):
39        x.append(z // m[i])
40        print(start + f"x{{i+1}}) + end, f" = {x[i]}; ", end=" ")
41    print("\n")
42
43    # Calculando w
44    for i in range(n):
45        w.append(x[i] % m[i])
46        print(start + f"w{{i+1}}) + end, f" = {w[i]}; ", end=" ")
47    print("\n")
48
49    # Calculando y
50    for i in range(n):
51        for j in range(1, m[i]):
52            if (w[i] * j) % m[i] == 1:
53                y.append(j)
54                break
55        print(start + f"y{{i+1}}) + end, f" = {y[i]}; ", end=" ")
56
57    # Calculando s
58    s = a[0] * x[0] * y[0]
59    for i in range(1, n):
60        s += a[i] * x[i] * y[i]
61    print(f"\n\nS={s}")
62
63    # Cálculo final
64    r = s % z
65    print(f"\n\nSolução:\nx={r}+{z}.k, onde k pertence aos inteiros")
66    print(f"0u x congruente {r} mod {z}\n\n")
67
68 if __name__ == "__main__":
69    main()
```

## **Diandra Chisa Tanaka**

Graduada em Engenharia Civil (2011-2016) pela Universidade Federal do Oeste da Bahia, Especialista em Estruturas de Concreto e Fundações pela Universidade Paulista e Mestre em Matemática em Rede Nacional (2019-2021). Durante a graduação, participou do Programa Permanecer 2012-2013 como bolsista do projeto intitulado: Projeto de Monitoria: Algoritmo e Programação de Computadores. Em 2013/2014 fez parte do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica como bolsista PIBIC, com o Projeto de Pesquisa: Técnicas de Inteligência Computacional com Aplicações em Problemas de Otimização em Engenharia. Apresentou seu trabalho de conclusão de Curso da Graduação na área de Patologia das Construções, com trabalho intitulado: Aplicação da Termografia Infravermelha no Estudo de Destacamento Cerâmico: Análise da Influência do Tamanho do Defeito e da Orientação Solar. Escreveu o trabalho de conclusão do curso da Pós-Graduação, intitulado: Estudo comparativo econômico entre diferentes concepções estruturais de um edifício comercial na cidade de Barreiras-BA. Escreveu a Dissertação: Teorema Chinês dos Restos: uma proposta de abordagem teórica com implementação computacional.