

Tesis de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias Mención Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, UNICEN. Argentina.

Comprensión del concepto Transformación de Funciones y su aplicación a la ecuación sinusoidal de la onda

Autor: Dr. Sergio Pablo Farabello

Directora: Dra. María Trigueros Gaisman

Jurado

Dra. Bettina Bravo (UNICEN, Argentina)

Dra. Viviana Angélica Costa (UNLP, Argentina)

Dra. Patricia Estrella Rojas (UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO, Chile)

Fecha defensa: 9 de noviembre de 2023

RESUMEN

Se presenta una investigación sobre la *comprensión del concepto de transformación de funciones* y su aplicación a la Física, particularmente a la ecuación sinusoidal de la onda. El estudio se realizó con estudiantes universitarios de un curso de Cálculo y alumnos avanzados del profesorado de Matemática. Participaron en total once estudiantes.

El conocimiento matemático constituye una herramienta básica para la comprensión y el manejo de la realidad en la que vivimos. Se encuentra presente en la vida cotidiana de los estudiantes, lo que posibilita que ellos puedan construir su saber matemático (Cadenas, 2007).

Para la mayoría de los estudiantes, la Física y la Matemática constituyen disciplinas compartimentadas, sin relación entre ellas, por lo que el trabajo con modelos matemáticos proporciona una excelente oportunidad para desarrollar eficazmente los conocimientos de los estudiantes, además de ampliar su visión de la importancia que tiene la Matemática en la solución de problemas que se presentan en el mundo real (Trigueros, 2009).

Thompson (1994) distinguió el papel que juega el concepto de función en seis grandes temas, siendo uno de ellos "comprender y representar fenómenos". Planteó la necesidad de realizar un debate, no sobre si debemos enseñar Física o Química en la clase de Matemática, sino en cómo podemos orientar a los estudiantes hacia la conceptualización de las situaciones que se tratan en nuestras clases de Matemática, en qué momentos debemos utilizarlos y qué papel podrían desempeñar las diferentes concepciones del concepto de función para apuntalar o inhibir a nuestros estudiantes al momento de conceptualizar los fenómenos físicos o químicos involucrados.

El profesor de Física, al momento de explicar un fenómeno físico, como por ejemplo el movimiento rectilíneo uniforme (MRU) y uniformemente variado (MRUV), introduce varios conceptos matemáticos, muchas veces sin explicitarlos como tal. Habla de magnitudes escalares y vectoriales; de constantes y variables; de relaciones entre variables: desplazamiento en función del tiempo y velocidad en función del tiempo, por ejemplo; de variaciones de distintas variables: velocidad como la variación del desplazamiento en el tiempo y aceleración como variación de la velocidad en el tiempo, etc. Sin dudas, el concepto de función y sus transformaciones toma un papel preponderante cuando hablamos de estudiar fenómenos físicos.

Las funciones matemáticas se encuentran presentes a lo largo de toda la currícula de Física. A modo de ejemplo, y sin pretender ser exhaustivos, podemos mencionar la cinemática, la dinámica, el trabajo y la energía, la gravitación, las oscilaciones, la mecánica de los fluidos, el electromagnetismo y la teoría de la relatividad.

La comprensión del concepto de función con mayor profundidad es necesaria para poder trabajar en la solución de problemas físicos de distinta naturaleza. A su vez, el conocimiento de funciones algebraicamente complejas, que se obtienen a partir de la transformación de funciones simples, resulta indispensable en la comprensión y solución de problemas en las distintas áreas de la Física, que es el objetivo de esta tesis.

En particular, nos interesa la ecuación sinusoidal de la onda que en su forma general $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ aparece en el estudio de fenómenos físicos tales como el movimiento de un péndulo, la oscilación de un cuerpo suspendido de un resorte y los circuitos de corriente alterna, entre otros. La forma general planteada, se trata de una transformación de la

función básica $y(t) = \sin t$ cuando varían los parámetros A , ω y φ .

La investigación se llevó a cabo en el marco de la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) desarrollada por Dubinsky y un grupo de colaboradores del Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC).

Dubinsky y Lewin (1986) proponen la “abstracción reflexiva” de Piaget como base teórica para el análisis de la comprensión de los conceptos matemáticos y plantean que el origen de la teoría APOE se encuentra en la reformulación de la teoría Piagetiana de la abstracción reflexiva para ser aplicada al Pensamiento Matemático Avanzado (PMA).

En la teoría APOE se define un ciclo de investigación que consta de tres componentes: 1) análisis teórico; 2) diseño e implementación de la enseñanza, y 3) observación, análisis y verificación de datos.

El primer paso del ciclo de investigación definido por la Teoría APOE para realizar el estudio sobre la comprensión del concepto de transformación de funciones consistió en la realización del *análisis teórico*, etapa que comenzó con la descripción de la *descomposición genética* —descripción detallada de las construcciones mentales— Acción, Proceso y Objeto— que el individuo debería realizar para poder enfrentarse satisfactoriamente a un concepto matemático en particular—, y culminó con la propuesta de una *descomposición genética inicial*.

En la segunda etapa del ciclo de investigación, que es el *diseño e implementación de la instrucción*, en base a la descomposición genética inicial, se diseñaron las actividades y ejercicios que luego se implementaron en el ciclo de enseñanza ACE —definido por la Teoría APOE— en sus tres etapas: (A) actividades, (C) discusión en el aula y (E) ejercicios.

Para implementar la última etapa del ciclo ACE, se diseñó un instrumento en función de la descomposición genética inicial consistente en un total de veinte preguntas, clasificadas en dos grandes categorías: intramatemáticas y aplicadas a los fenómenos físicos.

Para cada una de las preguntas se predijeron las construcciones mentales que podrían encontrarse en los trabajos que debían realizar los estudiantes.

Finalmente se realizó la observación, el análisis y la verificación de los datos para poder contabilizar y clasificar las construcciones mentales del concepto matemático estudiado y analizar la descomposición genética.

Una vez terminado el análisis de las producciones escritas, y luego de clasificar a los estudiantes según las construcciones mentales evidenciadas, se seleccionaron cuatro que se encontraban en distintos niveles y se les realizó una entrevista semiestructurada.

El análisis de los resultados reveló que las construcciones mentales previstas en la descomposición genética inicial aparecieron mayoritariamente en las producciones escritas. Podría decirse entonces que la descomposición genética inicial ha sido verificada empíricamente, por lo que puede constituir un modelo útil de cognición, aunque factible de ser mejorado, dado que, como sostiene la Teoría APOE, la

descomposición genética no es única y tampoco tiene limitaciones en cuanto a su evolución.

Los estudiantes pudieron ser caracterizados en diferentes niveles de acuerdo con las construcciones mentales evidenciadas en la totalidad de las actividades. El 27% (n=3) fue clasificado en un nivel Acción, el 46% (n=5) en un nivel Objeto, mientras que el 27% (n=3) restante no pudo ser clasificado en un único nivel por haber mostrado una transición entre la construcción Proceso y la construcción Objeto.

Cabe destacar también lo bien que fue recibido por parte de los estudiantes la contextualización de la transformación de funciones en la Física. En las entrevistas realizadas se pudo constatar que algunos, que habían cursado Física I el año anterior y no recordaban el tema de la consigna, realizaron consultas en los libros de texto para poder comprender de qué se trataba el fenómeno físico al que se hacía referencia. Hay coincidencia en este punto con lo expresado por Trípoli et al. (2019) y Gazzola et al. (2020) en sus trabajos de investigación.

El análisis de las producciones de los estudiantes en las categorías aplicadas a fenómenos físicos permitió verificar que los estudiantes que habían mostrado una construcción Objeto del concepto transformación de funciones pudieron aplicar dicho concepto en las ecuaciones sinusoidales involucradas en los fenómenos físicos propuestos.

En el caso de los circuitos resistivos, capacitivos e inductivos en corriente alterna, pudieron explicar el significado de las diferencias de fase entre la intensidad de corriente y el voltaje, como así también su valor. Más aún, pudieron comprender qué significa que la corriente esté “adelantada” o “atrasada” respecto del voltaje y relacionaron correctamente las expresiones algebraicas con las representaciones gráficas. Esto constituye un hito importante en el estudio de los circuitos de corriente alterna porque puede ayudar a una mejor comprensión del tema y evitar las confusiones que muchas veces se generan entre los estudiantes, a veces por diferencias en los libros de texto cuando aparecen, por ejemplo, inconsistencias entre las expresiones simbólicas y las representaciones gráficas (Giacosa et al., 2014).

De forma similar, al analizar la oscilación del sistema masa-resorte, los estudiantes pudieron explicar las variaciones que se producían en la amplitud y la frecuencia de oscilación como consecuencia de la variación de la constante k del resorte y la masa m del cuerpo. Esta caracterización es muy importante porque muchos libros de texto promueven la conceptualización de ω como una velocidad angular, en lugar de una magnitud característica del sistema oscilante que cumple un rol fundamental en la descripción del movimiento, y que depende de las propiedades inerciales del sistema oscilante y de las características de la acción recuperadora (Marino et al., 2015).

Tanto el refinamiento de la descomposición genética como el trabajo sobre la construcción de Esquemas por parte de los estudiantes queda como propuesta para futuras investigaciones.

Se espera que los resultados obtenidos en esta investigación aporten información sobre cómo los estudiantes construyen el concepto de transformación de funciones y cómo esa

construcción incide en su aplicación a la ecuación sinusoidal de la onda. Pueden surgir otras líneas de trabajo similares, referidas a la Modelización Matemática de otro tipo de fenómenos físicos, químicos, biológicos, etc.

Las futuras investigaciones que surjan a partir de esta investigación posibilitarán el diseño de nuevos procesos de enseñanza que relacionen la Matemática con las Ciencias Experimentales. Además, los resultados aquí expuestos podrán ser utilizados como base para diseñar, en el marco de la teoría APOE, instrumentos para la enseñanza del concepto de transformación de funciones y su aplicación a la modelización Matemática en general.

REFERENCIAS

- CADENAS R. (2007). Carencias, dificultades y errores en los conocimientos matemáticos en alumnos del primer semestre de la Escuela de Educación de la Universidad de Los Andes. *Orbis. Revista Científica Ciencias Humanas*, 2(6), 68-84. Disponible en <https://www.redalyc.org/pdf/709/70920605.pdf>
- DUBINSKY E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 08(03), 24-41. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/10056/1/Aplicacion1996Dubinsky.pdf>
- GAZZOLA M., OTERO R. Y LLANOS C. (2020). Acciones didácticas en el desarrollo de un recorrido de estudio y de investigación que involucra a la matemática y a la física en la escuela secundaria. *Perspectiva Educativa. Formación de Profesores*, 59(1), 52-80. Disponible en <https://www.scielo.cl/pdf/perseduc/v59n1/0718-9729-perseduc-59-01-52.pdf>
- GIACOSA N., ZANG C., GALEANO R. y SUCH A. (2014). Oscilaciones electromagnéticas forzadas: análisis del sistema simbólico y lingüístico empleado en libros de texto universitarios. *Revista de Enseñanza de la Física*, 26(Extra), 131-144. ISSN 2451-6007. Disponible en <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/revistaEF/article/view/9744>
- MARINO L., GIORGI S., CÁMARA C. y CARRERI R. (2015). Controversias en el tratamiento del movimiento oscilatorio armónico simple en libros de Física del nivel básico universitario. *Revista de Enseñanza de la Física*, 27(Extra), 79-87. ISSN 2469-052X. Disponible en <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/revistaEF/article/view/12589>
- THOMPSON P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schonfeld & J. J. Kaout (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education, I* (Issues in Mathematics Education Vol. 4, 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society. Disponible en https://www.researchgate.net/publication/242261892_Students_Functions_and_the_Undergraduate_Curriculum
- TRIGUEROS M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las Matemáticas. *Innovación Educativa*, 9(46), 75-87. Disponible en <https://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894008.pdf>
- TRÍPOLI M., TORROBA P., DEVECE E. y AQUILANO L. (2019). Funciones trigonométricas, periódicas y oscilatorias: una propuesta de trabajo interdisciplinario. V *Jornadas de Investigación, Transferencia y Extensión de la Facultad de Ingeniería*, 166-171. Universidad Nacional de La Plata, Argentina. ISBN: 978-950-34-1749-2. Disponible en <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/75044>