REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Un REI para la enseñanza de la geometría en la formación de profesores de matemática

Paula Rabanedo, Viviana Carolina Llanos[1,2], María Rita Otero[1,2], María Paz Gazzola[1,2]

prabanedo@alumnos.exa.unicen.edu.ar, vcllanos@niecyt.exa.unicen.edu.ar, rotero@niecyt.exa.unicen.edu.ar, mpgazzola@niecyt.exa.unicen.edu.ar

[1]Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN).
[2]Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Argentina.

Resumen

La investigación aborda el problema de la enseñanza de la geometría en el nivel medio y superior, y específicamente el estudio de la homotecia. Diseñamos un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI) para una cátedra de geometría en la formación de profesores de los ISFD de la provincia de Buenos Aires. Se presenta aquí un primer análisis del Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) del REI para la enseñanza de la geometría y específicamente homotecia con futuros profesores de matemática. El análisis basado en el MPR permite concluir acerca del potencial del REI diseñado para introducir un estudio de la geometría, basado en una enseñanza por cuestionamiento en la formación de los profesores.

Palabras clave: Geometría. Homotecia. Formación de profesores. Enseñanza basada en preguntas.

An SRP for teaching geometry in mathematics teacher education.

Abstract

The research addresses the problem of teaching geometry at the middle and high school level, and specifically the study of homothecy. We designed a Study and Research Path (SRP) for a geometry course in teacher training in the ISFD of the province of Buenos Aires. A first analysis of the SRP's Praxeological Model of Reference (PMR) for teaching geometry and specifically homothecy with future mathematics teachers is presented here. The analysis based on the PMR allows us to conclude about the potential of the REI designed to introduce a geometry study based on a teaching by questioning in teacher training.

Keywords: Geometry. Homothecy. Teacher training. Question based teaching.

Un PER pour l'enseignement de la géométrie dans la formation des enseignants de mathématiques.

Résumé

Cette recherche aborde le problème de l'enseignement de la géométrie aux niveaux secondaire et supérieur, et plus particulièrement l'étude de l'homothétie. Nous avons conçu un parcours d'étude et de recherche (PER) pour un cours de géométrie dans la formation des enseignants à l'ISFD de la province de Buenos Aires. Nous présentons ici une première analyse du Modèle de Référence Praxéologique (MRP) du REI pour l'enseignement de la géométrie et plus particulièrement de l'homothétie avec les futurs professeurs de mathématiques. L'analyse basée sur le MRP nous permet de conclure sur le potentiel du REI conçu pour introduire une étude de la géométrie basée sur l'enseignement par questionnement dans la formation des enseignants.

Recepción:14/03/2023 *Aceptación: 25/10/2023*

Mots clés: Géométrie, Homothétie. Formation des enseignants. Enseignement par questions.

Um PEP para o ensino de geometria na formação de professores de matemática.

Resumo

Esta pesquisa aborda o problema do ensino de geometria nos níveis secundário e superior e, especificamente, o estudo da homotetia. Projetamos um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) para um curso de geometria na formação de professores no ISFD da província de Buenos Aires. Apresentamos aqui uma primeira análise do Modelo de Referência Praxeológica (PRM) do REI para o ensino de geometria e, especificamente, de homotetia com futuros professores de matemática. A análise baseada no RPM nos permite concluir sobre o potencial do REI projetado para introduzir um estudo de geometria, com base em um ensino por questionamento na formação de professores.

Palavras-chave: Homothecia. Treinamento de professores. Ensino baseado em perguntas.

1. INTRODUCCIÓN

La Geometría se encuentra cada vez más desvinculada de las instituciones de enseñanza. Se reconocen investigaciones que confirman que en el Nivel Secundario el estudio de lo geométrico suele quedar relegado para el final de cada año escolar y aislado de las demás áreas, situación que evidencia la pérdida de sentido de esta disciplina (Barrantes y Blanco, 2005). Además, los conocimientos relativos a las técnicas de describir o clasificar figuras se reducen a cuestiones sobre medición (Pérez Pozuelo & Guillén Soler, 2007), privilegiando la memorización de fórmulas, definiciones, teoremas y propiedades basadas en construcciones mecánicas y descontextualizadas (Labra Peña & Vanegas Ortega, 2022). Estos fenómenos evidencian la desaparición de las razones de ser de las organizaciones matemáticas que pueden ser estudiadas y son una de las consecuencias de lo que Gascón (2004) denomina "encierro en los temas". Una cuestión se encuentra "encerrada" en sí misma si se ignora el por qué y el para qué de su estudio escolar. En este sentido, es posible afirmar que, en general, los conocimientos matemáticos son presentados como acabados e incuestionables, y desaparecieron las preguntas por el por qué y para qué de tal saber. Si se tiene en cuenta que el porqué de varios conocimientos de matemática estaría en la Geometría nos cuestionamos entonces acerca del motivo de la desaparición de hecho de la misma en la escuela secundaria, o en ocasiones y en el mejor de los casos por qué se estudia como si fuera transparente e incuestionable en sí misma, aislada de otras organizaciones (Colombo Rojas, Llanos y Otero, 2016). Todos estos cuestionamientos al tratamiento de lo geométrico en la escuela secundaria exceden al alumno, tal vez sea una responsabilidad del profesor, dado que en los diseños curriculares actuales corresponde estudiar geometría (Eugui, 2023), pero los profesores de hecho, no la enseñan. Si trasladamos este problema al ámbito de lo profesional consideramos muy importante conocer qué es lo que sucede en la formación de los profesores.

Teniendo en cuenta que la formación de profesores en los Institutos Superiores de Formación Docente (ISFD), supera a las instituciones universitarias en la provincia de Buenos Aires, nos centramos en conocer los programas de geometría de los ISFD. Estos programas, están reglamentados por la Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires y la Dirección Provincial de Educación Superior. Se analiza que, en dichos programas hay varios temas de geometría, como por ejemplo las unidades de medida y transformaciones del plano, que no corresponden a los saberes mínimos que deben estudiarse en la formación de profesores, pero sí se proponen en los programas de secundario, aunque en dicho nivel las transformaciones geométricas: homotecia, simetría, reflexión y traslación, resultan ser estudiadas casi al final del año escolar y son frecuentemente postergadas por los profesores o terminan por no ser abordadas (Hoyos, 2006), tal vez porque no forman parte de lo que se exige estudiar en su formación profesional. Particularmente, el estudio de la homotecia muchas veces suele proponerse como caso particular de la semejanza (Escudero Perez, 2005) o, en caso de ser estudiada con anterioridad a ésta, su estudio resulta ser escueto y su razón de ser pareciera apuntar sólo a fundamentar la semejanza. Entonces, la razón de ser de estas cuestiones parecería estar desapareciendo de la geometría escolar y este problema podría radicar en los planes de estudio del profesorado en Matemática. En esta investigación nos proponemos diseñar y analizar una propuesta para enseñar geometría en la formación de los profesores de los ISFD de la provincia de Buenos Aires, a partir de un REI que permitiría una cobertura del programa de geometría métrica, con énfasis del estudio de la homotecia que actualmente no es parte de los mismos, pero si correspondería estudiarla vinculada a los demás saberes de geometría del programa.

2. ESTADO DEL ARTE

Se reconocen muchas investigaciones relativas a la enseñanza de la geometría para la escuela secundaria, y específicamente para homotecia desde diferentes referenciales teóricos. La mayor parte de los trabajos recopilados se enfocan en el diseño de propuestas de enseñanza; por ejemplo, Gualdrón (2007) diseña una serie de actividades para enseñar semejanza siguiendo el modelo Van Hiele (1957) y concluye acerca de las ventajas que los estudiantes poseen para estudiar la semejanza con este modelo y además postula que la semejanza no debe ser estudiada aislada de la homotecia y el teorema de Thales. Julio Barrera (2014) también se basa en este modelo para diseñar actividades para la enseñanza de la semejanza a través de las transformaciones geométricas y el uso de GeoGebra, describiendo las dificultades de los estudiantes al aplicar isometrías. Otros autores también especifican la utilización de diferentes recursos materiales y/o digitales, tal es el caso de Labra Peña y Vanegas Ortega (2022) quienes combinaron el uso del pantógrafo, la camara oscura y el software GeoGebra para analizar las características de la homotecia y afirman que los profesores deben generar procesos de enseñanza para mejorar los grados de adqusición de cada nivel de Van Hiele. Por su parte, Galleguillos Bustamante y Candia Cisternas (2011) utilizan una pizarra digital interactiva en combinación con GeoGebra, mostrando mejores resultados los estudiantes que las utilizaron, en comparación con los que no.

En menor medida se reconocen investigaciones que vinculan la homotecia con la Geometría Analítica, aunque se destacan las que realizan un abordaje epistemológico, en particular Lemonidis (1990) realiza en análisis epistemológico de la homotecia y afirma que el tratamiento de esta puede facilitarse o no según el tipo y la complejidad de las configuraciones homotéticas. Otras investigaciones realizan un análisis bibliográfico como por ejemplo los trabajos de Bardales Estela (2021) quien desarrolló actividades que permitieron comprender los procesos geométricos involucrados en el estudio de la homotecia de acuerdo con las aprehensiones en el registro figural (Duval, 1994). Rubilar Crisóstomo (2020), realiza una revisión de lós programas de estudio y textos escolares y concluye que existe un fenómeno de desarticulación entre los conceptos de homotecia, semejanza y teorema de Thales, al igual que González Flores y otros (2020) que también identifican diferencias en las definiciones para el concepto de homotecia en la literatura examinada.

Estas investigaciones dan cuenta que el concepto de homotecia no sólo ha ido cambiando a través de los años, sino que se encuentra constantemente modificado por las propuestas editoriales y los programas de estudio. Sin embargo, cabe resaltar que como resultado de varias investigaciones aparece la necesidad de que el estudio de la homotecia no se realice de forma aislada y desarticulada de otros conocimientos, sino que forme parte de una propuesta que la integre con otros saberes tales como: isometrías, semejanza, teorema de Thales, entre otros. Además, es importante considerar el hecho de que es fundamental un estudio completo de este saber que integre los aspectos centrales de esta transformación, como la construcción del centro de homotecia, la identificación de puntos homólogos, el cálculo de la razón de homotecia y la determinación de la dirección de esta. Podríamos considerar, sin embargo, que el problema del "encierro" (Gascón, 2004) de la homotecia respecto de otros saberes, un estudio incompleto del mismo y la escasa presencia en las aulas de la geometría en general, podría tener una respuesta en la formación de los profesores.

Son muy pocas las investigaciones recabadas que abordan el problema de la enseñanza de la geometría en la formación de profesores, y más aún vinculadas a la homotecia. La investigación de Thaqi y Giménez (2014) confirma que los profesores en su proceso formativo presentan dificultades con las transformaciones geométricas, o directamente no las estudian ya que, por ejemplo, presentan dificultades con las simetrías y las demás transformaciones geométricas y con una visión dinámica de ellas. Específicamente, González Flores y otros (2020a) sostienen que existe una discordancia entre elementos conceptuales y cognitivos sobre el concepto de homotecia por parte de los profesores, quienes reconocen además poseer escaso conocimiento histórico sobre esta OM, lo que se constituiría como un obstáculo. La mencionada falta de un conocimiento amplio sobre la homotecia podría tener fundamento en la ausencia de su abordaje en los planes de formación de profesores (Gonzáles Flores, Arias Gómez & Picado Flores, 2020).

En la investigación hemos analizado previamente y estudiado matemática con un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI) (Chevallard, 2009, 2013), el REI "*de la caja del pastelero*" (Chappaz & Michon, 2003; Otero, 2021; Otero & Gazzola, 2023; Otero, Gazzola y Llanos, 2021, 2023a, 2023b) y hemos identificando las virtudes en términos de posibilidades para el estudio de diferentes saberes de matemática que podrían reencontrarse según se avance en el estudio de una pregunta que se denomina generatriz. La profundización en la "geometría de la caja" nos lleva a diseñar y analizar otro REI que iniciaría con la pregunta: Q_0: *¿Por qué una fotocopiadora puede realizar la ampliación y reducción de una imagen conservando las características de la misma?*, que involucra las transformaciones geométricas del plano y otros saberes que podrían reencontrarse como parte del estudio. Nuestro problema didáctico es introducir en la formación de profesores una enseñanza basada en el estudio y cuestionamiento de la geometría, a partir de un REI cuyo diseño se presenta aquí. Nos enfocamos en responder las dos preguntas siguientes: ¿Qué saberes de matemática, y específicamente entre los involucrados en el diseño de geometría métrica, podrían reencontrarse con el estudio de Q_0? ¿En qué medida el REI propuesto podría contribuir con la formación de los profesores? Se adopta como marco teórico la Teoría Antropológica de la Didáctico (Chevallard, 1999) y específicamente la noción de REI como respuesta al problema identificado en la enseñanza habitual.

3. LA TAD Y LOS RECORRIDOS DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN (REI)

Un REI (Chevallard, 2009; Otero, 2021) es un constructo teórico propuesto por la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) que permite posicionar a las preguntas como punto de partida de los procesos de estudio e introducir una nueva epistemología que devuelva el sentido y la funcionalidad a la matemática escolar y reemplace a la pedagogía actual. En un REI el estudio inicia con una pregunta generatriz Q_0, y la construcción de una posible respuesta conduce a analizar preguntas derivadas de Q_0 en función de las necesidades generadas por dicho estudio.

Un REI podría definirse a partir del esquema herbartiano (Chevallard, 2009, 2013), el cual explicita lo que sucede cuando un grupo de estudiantes X estudia una pregunta Q con la supervisión de Y y proporciona una metodología para desarrollar los procesos de estudio. Dicho modelo se sintetiza: $[S(X; Y; Q) \rightharpoonup M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$

La elaboración de $R^{\heartsuit}$ a partir de Q supone la "fabricación", por parte del sistema S, de un medio didáctico:

$$M=\{R_1^{\diamond}, R_2^{\diamond}, R_3^{\diamond}, \ldots, R_n^{\diamond}, Q_{(n+1)}, \ldots, Q_m, O_{(m+1)}, \ldots, O_p, D_p, D_{(p+1)}, \ldots, D_q\}$$

donde M es el conjunto de todos los recursos útiles: $R_i^{\diamond}$ que son respuestas previamente construidas, Q_i que son las preguntas derivadas de Q, O_k las “obras” que pueden reencontrarse y D_l conjunto de datos o trabajos empíricos, útiles en el estudio y para el funcionamiento del mismo. Con el objetivo de elaborar como resultado una respuesta $R^{\heartsuit}$, S deberá construir y organizar (➦) el medio M con el cual generará (➥) una respuesta R.

La importancia de un REI radica en la posibilidad de cubrir a partir de él, la mayor cantidad de organizaciones matemáticas del programa de estudios. Por tratarse de la formación de profesores, el REI también es una posibilidad de llevar al aula una enseñanza que vendría a superar muchos de los problemas de la enseñanza actual, sobre todo porque un REI se basa en una enseñanza basada en el cuestionamiento.

4. METOLOGÍA

El equipo de la presente investigación está compuesto por cuatro investigadoras, de las cuales tres cuentan con una amplia trayectoria en el diseño e implementación de REI en diferentes ámbitos educativos, y sólo una experimenta el diseño de un REI por primera vez.
En investigaciones previas (Otero, 2021; Otero & Gazzola, 2023; Otero, Gazzola y Llanos, 2021, 2023a, 2023b) las tres investigadoras ocuparon la posición de *Y* y la restante, junto a otros investigadores, ocuparon la posición de estudio *X* de un sistema didáctico *S(X; Y; Q)* en un curso universitario de formación de profesores en servicio que se ocupó de vivenciar el REI de “*la caja del pastelero*” (Chappaz & Michon, 2003) desde la posición de análisis y estudio de la cuestión generatriz y sus posibles respuestas. Y en una segunda instancia, el problema evolucionó a considerar qué cuestiones se podían estudiar a partir de dicho REI. Más adelante, detallaremos el análisis del REI de la caja y sus alcances y limitaciones para la enseñanza de la geometría en el curso de geometría métrica para el que se diseña el REI *“de la fotocopiadora”*. En este nuevo REI, se piensa al grupo *X* como los estudiantes del profesorado que cursan geometría métrica. El diseño consta, hasta el momento, de dos fases:

- Fase 1: Diseño de la pregunta generatriz Q_0 que permita encontrar o reencontrar las diferentes organizaciones matemáticas vinculadas principalmente a la geometría métrica que debe estudiarse en el profesorado.
- Fase 2: Elaboración del Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) que se desprende del REI propuesto y análisis de los saberes matemáticos y principalmente geométricos que se pueden reconstruir a partir de los distintos recorridos. Desarrollaremos con mayores detalles esta cuestión más adelante.

No se menciona aquí que el investigador para poder diseñar el REI vivenció en primera persona otro REI y recibió formación en los últimos desarrollos de la TAD para tal fin. Tampoco se completan las fases que corresponderán a la implementación y análisis de los resultados del REI, pues aquí estamos analizando el potencial del REI diseñado para ser implementado en un futuro próximo.

5. EL REI DE LA CAJA

Nuestra investigación inicia con el estudio y análisis de un REI denominado “*la caja del pastelero*” (Chappaz & Michon, 2003), que ha sido desarrollado y utilizado para enseñar en el nivel superior por Otero (2021), Otero y Gazzola (2023) y Otero, Gazzola y Llanos (2021, 2023a, 2023b) en el cual se propone construir cajas de tal manera que éstas resulten estar anidadas. El armado y desarmado de la caja, posibilita obtener sus dimensiones en función de las de la hoja. Un modelo de la caja es el que se representa en la Figura 1.

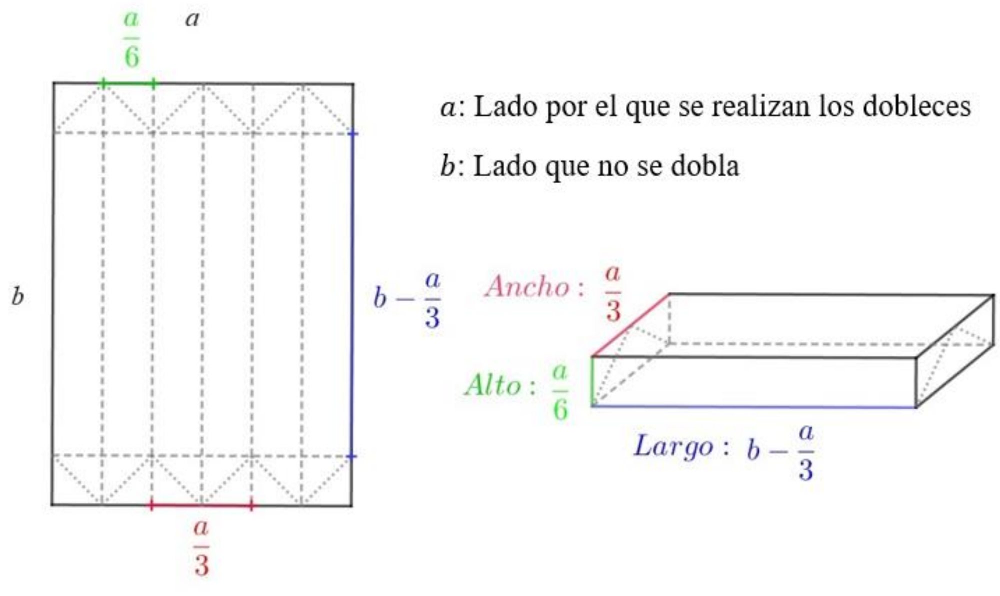

Figura 1 – Relación entre las dimensiones de la caja y la hoja desplegada
Fuente: Elaboración propia

Como una opción de este REI, se desprende la construcción de cajas anidadas. Aquí se profundiza en el análisis geométrico de la caja y de las condiciones que deben cumplirse para que las cajas resulten “anidadas” (Figura 2).

Recepción:14/03/2023 Aceptación: 25/10/2023

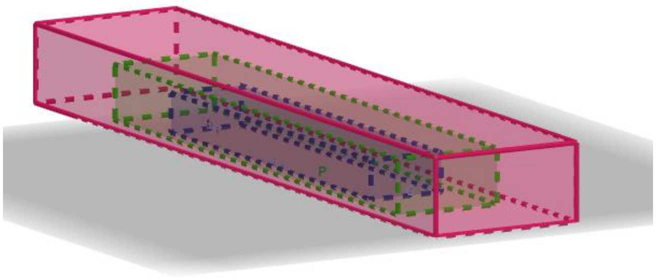

Figura 2 – Cajas anidadas
Fuente: Elaboración propia

Para que esto sea posible, es necesario que éstas puedan obtenerse mediante sucesivas homotecias en el espacio. Aplicando una homotecia de centro *O* al prisma *P* (Figura 3) se obtiene *P'* (Figura 4), cuyos vértices son los transformados $X'=h_k(X)$ que se encuentran sobre las semirrectas con origen en *O* y que pasan por cada *X* y verifican que $|(OX')|=k\cdot|(OX)|$. Así, las dimensiones de las cajas son proporcionales, e implican que las hojas utilizadas para construirlas resulten homotéticas. Más aún, para que esto suceda, la razón de homotecia deberá coincidir con la razón entre los lados de la hoja que "genera la serie".

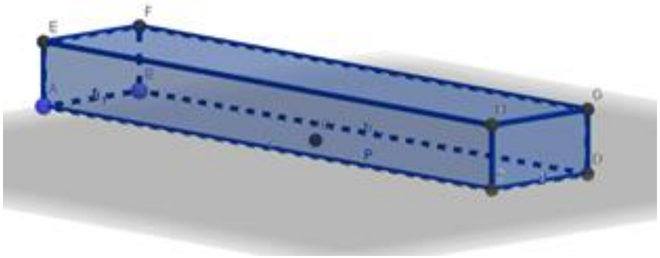

Figura 3 – Prisma *P* de vértices *A, B, C, D, E, F, G* y *H*.
El punto *O* es el centro de la base del prisma.
Fuente: Elaboración propia

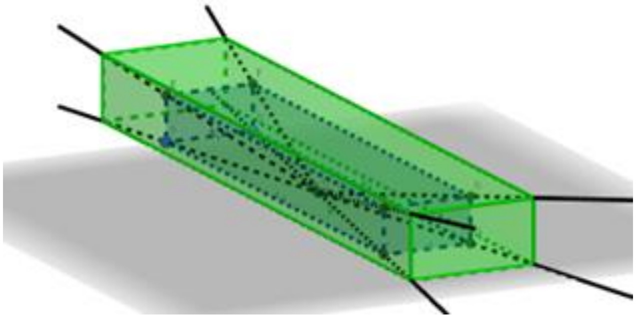

Figura 4 - Prisma *P'* (verde) de vértices *A', B', C', D', E', F', G'* y *H'*.
El punto *O* es el centro de la base del prisma.
Fuente: Elaboración propia

Si la razón resulta ser un número irracional, derivamos en el estudio de hojas que representan rectángulos dinámicos. Existen diferentes tipos de rectángulos dinámicos (Alsina, 1995), particularmente los que se caracterizan por tener razón $\sqrt{n}$ generan, para cada *n*, una serie de rectángulos que resultan ser homotéticos entre sí y de igual razón. Las hojas que utilizan las fotocopiadoras, serie DIN, representan un rectángulo dinámico particular de razón$\sqrt{2}$. El fundamento para construir las sucesivas hojas DIN se halla, además de ser un rectángulo dinámico, en aplicar la transformación geométrica homotecia a la hoja inicial de la serie. Un primer análisis de los rectángulos dinámicos nos lleva a considerar la clasificación de los mismos, como se muestra en la Figura 5.

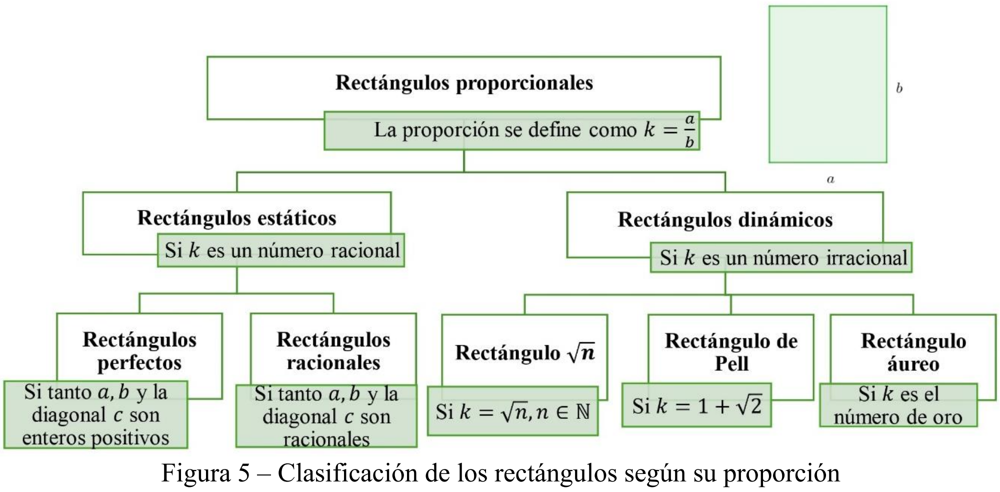

Figura 5 – Clasificación de los rectángulos según su proporción
Fuente: Elaboración propia

Si bien en este trabajo nos hemos enfocado en el aspecto geométrico que nos interesa del problema de la caja, el trabajo de Otero y Gazzola (2023) presenta un análisis completo de las posibilidades del REI, que excede al interés

Recepción:14/03/2023 *Aceptación: 25/10/2023*

del estudio de lo geométrico en la formación de los profesores. En consecuencia se desarrolla para la cátedra geometría métrica de los ISFD de la provincia de Buenos Aires el REI de la forocopiadora que se sintetiza a continuación.

6. EL REI DE LA FOTOCOPIADORA

El REI inicia con la pregunta generatiz:

> *Q_0: ¿Por qué una fotocopiadora puede realizar la ampliación y reducción de una imagen conservando las características de la misma?*

Inicialmente se desarrolla un posible Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) del REI que hemos diseñado, con la finalidad de analizar la viabilidad de implementarlo en la formación de profesores de institutos terciarios, donde la profesora es la investigadora.

Específicamente, nos interesa analizar la viabilidad en el primer año del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática que, según el Diseño Curricular de Educación Superior de la provincia de Buenos Aires, Argentina, la organización de los distintos espacios curriculares de dicho año se bifurca en los que corresponden a la formación general y a la formación específica. Ésta última se compone de tres asignaturas: *Introducción al cálculo*, *Geometría métrica* y *Álgebra I*. Tal como hemos mencionado, la potencialidad de un REI se evalúa a partir de las organizaciones del programa de estudios que puede cubrir, por lo tanto, en esta investigación analizamos qué saberes de estas asignaturas es posible reconstruir con el REI que hemos diseñado, particularmente analizaremos en detalle los saberes que pueden estudiarse con el mismo en la cátedra de *Geometría métrica* y que se encuentran vinculados con la homotecia.

Como ya hemos mencionado, el REI de *"la caja del pastelero"* (Chappaz & Michon, 2003) permite reencontrar diferentes OM y geométricamente requiere, en un primer momento, del estudio de la homotecia en el espacio para garantizar las condiciones para que las cajas puedan "anidarse". Posteriormente, el problema de anidar cajas se justifica a partir de una serie de hojas que resultan ser homotéticas. Particularmente, las características de las hojas de la serie DIN y el estudio de la homotecia que hemos desarrollado como respuesta al problema de la caja, inspiraron la necesidad y el desarrollo de un nuevo REI que se enfoca específicamente en las cuestiones geométricas y que involucra un problema que resulta habitual para los estudiantes, como es el caso de la fotocopiadora.

7. MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERENCIA

En esta investigación, el estudio de Q_0 genera una arborescencia de recorridos a partir de los cuales es posible estudiar diferentes Organizaciones Matemáticas (OM) que son necesarias para dar respuesta a la pregunta generatriz y que permiten cubrir parte de las cuestiones matemáticas del plan de estudios del primer año de la formación de profesores en Matemática, específicamente del programa correspondiente a la cátedra de *Geometría métrica* que es donde interesa implementar el REI en una próxima fase. En el esquema (Figura 6) se muestra una síntesis de las preguntas centrales que orientarían el estudio de la pregunta Q_0.

Figura 6 – Esquema que orienta el estudio de la pregunta generatriz. Fuente: elaboración propia

8. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Un primer análisis permite identificar las diferentes posibilidades para ampliar o reducir una imagen, conservando las características de la misma, y considerando dos posibilidades:

- Que la impresión se realice sobre el mismo tamaño de papel entonces, el porcentaje de ampliación no debe superar la razón entre el lado menor de la hoja y el lado menor de la imagen, mientras que para reducir el porcentaje debe estar entre cero y uno.
- Si los papeles son de diferente tamaño, entonces el porcentaje de ampliación o reducción seleccionado debe garantizar que la imagen no supere los lados de la hoja sobre la que se imprime.

Si se considera que las imágenes deben ocupar la misma superficie en ambas hojas, se abre paso a un nuevo recorrido del cual se desprende la necesidad de cambiar el tamaño de la hoja sobre la que se desea ampliar o reducir la imagen. Cada lado de la hoja puede expresarse mediante una función de variable real que puede ser lineal o racional, y representa la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales. La consideración de los distintos parámetros permite el estudio de diferentes funciones y sus respectivas inversas, que en su mayoría pertenecen al programa de *Introducción al cálculo*.

Posteriormente, se plantea un análisis geométrico para determinar las características de la hoja que se necesita para realizar la ampliación o reducción de una imagen conservando las características de la misma y, en principio, ocupando la misma superficie en ambas hojas. Considerando una homotecia, cuya razón es la razón entre los lados de la hoja "de partida", todas las sucesivas hojas que resulten homotéticas con ésta cumplirán las condiciones.

Al igual que en el estudio de la caja, si la razón entre los lados de la hoja resulta ser un número irracional, las hojas constituyen rectángulos dinámicos, que involucran, entre otros, el estudio de diferentes construcciones geométricas con regla y compás. Sin embargo, en esta investigación nos interesan las hojas que cumplen estas características y que son utilizadas por las fotocopiadoras: las hojas de las tres normas (A, B y C) de la serie DIN poseen proporción $\sqrt{2}$ y representan un caso particular de rectángulo dinámico, que verifica que toda la serie de rectángulos al dividirse a la mitad o duplicarse son homotéticos con el rectángulo de partida y su razón también será $\sqrt{2}$, en particular esto ocurre con las sucesivas hojas de la serie DIN-A (Figura 7).

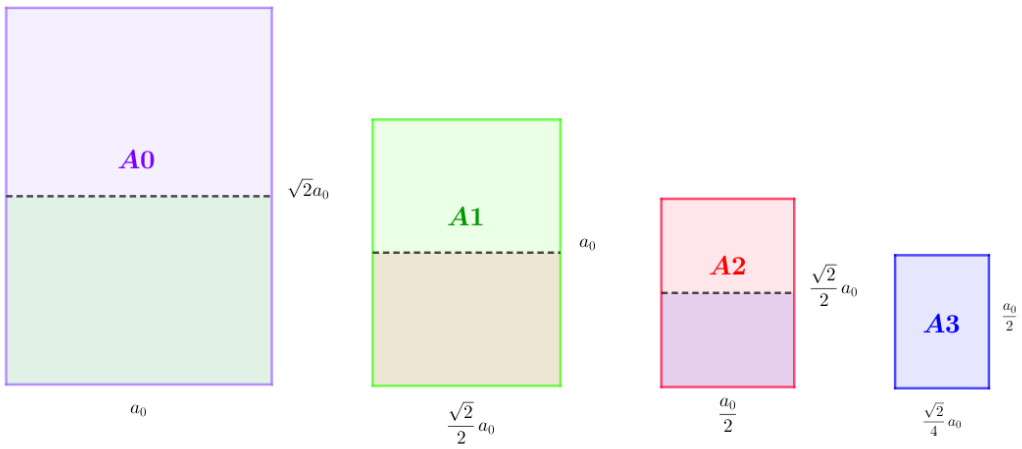

Figura 7 – Relación de las hojas de la serie DIN-A
Fuente: Elaboración propia

Para establecer la relación geométrica entre dos hojas cualesquiera *An*, *Bn*, y *Cn*, dentro de una misma serie, basta con considerar una homotecia o una composición de homotecias de razón $k=\sqrt{2}$ o $k=1/\sqrt{2}$. Entre series, las dimensiones de las hojas *Bn* involucran la construcción con regla y compás de la media geométrica entre las dimensiones de dos hojas consecutivas *An* y *An+1*, y las dimensiones de las hojas *Cn* se obtienen a partir de la media geométrica entre una hoja *An* y una *Bn*, siendo n el número correspondiente a la posición que ocupa la hoja dentro de la serie. También, es posible caracterizar a las normas B y C únicamente en función de las hojas de la serie A, para ello es necesario considerar el estudio de la composición de homotecias, esto es, la hoja *Bn* se caracteriza por ser homotética de razón $k=\sqrt[4]{2}$ respecto de una hoja *An* y la hoja *Cn* es homotética de razón $k=\sqrt[8]{2}$ a una hoja *An*.

Si consideramos otras posibilidades de impresión que ofrece la fotocopiadora, aparecen situaciones en las cuales ocurre un cambio de posición que supone un movimiento y permite estudiar isometrías. Esto es, en el panel frontal, es posible observar que pueden realizarse copias de manera tal que:

- *Reduce y orienta los originales para encajar en una hoja dos originales*: se tienen dos originales de igual tamaño y se desean acomodar, por ejemplo, en otra hoja del mismo tamaño, ocurre entonces una reducción seguida de una traslación y rotación. (Figura 8)
- *Reduce los originales de tal forma que los ajusta para poder tener cuatro originales en una hoja*: análogamente al anterior, se tiene una combinación de una reducción seguida de una traslación.

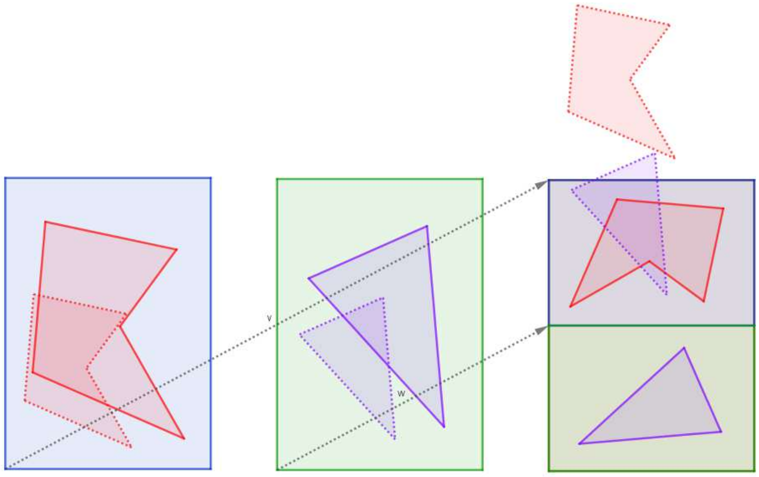

Figura 8 – Descripción de los movimientos que representan una impresión de “dos a uno”
Fuente: Elaboración propia

Si se imprime “a dos caras” dos originales que se encuentran en distintas hojas del mismo tamaño, depende cómo se coloque el papel “de salida” podrá ocurrir que la imagen de una de las caras sea simétrica con la original respecto de un eje. Las distintas transformaciones geométricas que se combinan para cada una de las opciones de impresión permiten estudiar la composición de isometrías y homotecia, lo que equivale a estudiar semejanza, todos conocimientos pertenecientes al programa de *Geometría métrica*.

Una vez estudiadas las diferentes isometrías, es posible ir más allá de las transformaciones geométricas y considerar la simetría para realizar una clasificación de cuadriláteros en el plano. Si se considera un rectángulo es posible describir 4 ejes de simetría: sus diagonales y las mediatrices de sus lados. En particular, si el rectángulo resulta ser un cuadrado tendrá los mismos ejes de simetría. Si luego, se considera un cuadrilátero no rectángulo, entonces es posible analizar para cada uno de los casos, cuáles son los ejes de simetría de cada uno de ellos y qué relación conserva respecto del rectángulo: paralelogramo, rombo, trapecio y romboide.

Una vez analizados los diferentes cuadriláteros, podemos pasar a estudiar otro grupo de figuras geométricas ya que al considerar un cuadrilátero cualquiera es posible transformarlo en un triángulo de igual área. De esta forma, podrá estudiarse la clasificación y caracterización de los triángulos y sus puntos y rectas notables, y además vincularlo con el estudio de la homotecia y la semejanza. Por ejemplo, el ortocentro de un triángulo y la relación con la homotecia y otras transformaciones: Dado un triángulo cualquiera *ABC*, si se tranzan las paralelas a cada uno de los lados que pasan por el vértice opuesto, se obtiene el triángulo *A’B’C’* de lados dobles de los del primero y cuyos puntos medios son los puntos *A*, *B* y *C*. Las alturas del triángulo *ABC* son las mediatrices del triángulo *A’B’C’* y se cortan en un único punto *E* denominado ortocentro del triángulo (Figura 9). Si se analizan las dos figuras, es posible determinar que los triángulos son semejantes, para ello podemos considerar la descomposición de la semejanza como producto de una homotecia de razón 2 y una simetría central, ambas con centro en *D*, que es el punto de intersección de las rectas que pasan por *A* y *A’*, *B* y *B’* y *C* y *C’*.

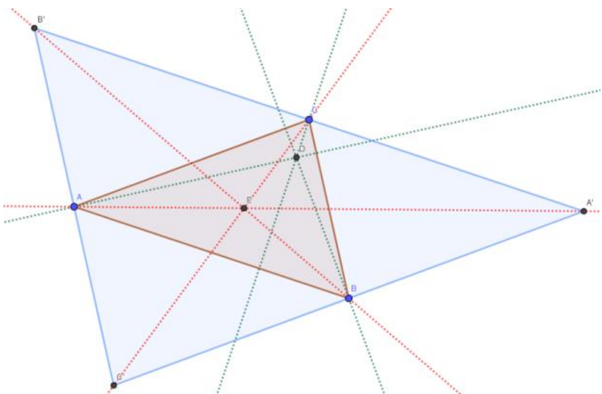

Figura 9 – Triángulos *ABC* y *A’B’C’* con sus alturas y bisectrices, el ortocentro *E* y el centro *D* de homotecia.
Fuente: Elaboración propia

Recepción:14/03/2023 *Aceptación: 25/10/2023*

Finalmente, una última posibilidad analizada, al menos hasta el momento, parte de las condiciones de los análisis anteriores y permite obtener una sucesión geométrica de igual razón que describe las características de las sucesivas hojas, si se fija un lado de cualquier hoja, y se considera fija la razón entre sus lados. Si la razón resulta ser $k>1$, sobre las sucesivas hojas podrá imprimirse la ampliación de la imagen, y si $k<1$ podrá reducirse la imagen. Considerando la función sucesión y la variación de sus parámetros, es posible estudiar funciones polinómicas, exponencial, logarítmica, que en su mayoría pertenecen a la asignatura *Introducción al cálculo*, e incluso la inversa de una función, desde los saberes de la *cátedra de Álgebra I*.

9. CONCLUSIONES

En esta investigación hemos propuesto el diseño de una pregunta generatriz Q_0 que origina el REI de la fotocopiadora y hemos desarrollado brevemente una posible descripción del MPR y de los saberes que pueden reencontrarse a partir del mismo, principalmente los que se encuentran vinculados a la homotecia y otros conocimientos del programa de *Geometría métrica* correspondiente al primer año del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática. Del análisis del Diseño Curricular se desprende que es posible enseñar geometría métrica y con ella algunas nociones numéricas, de análisis y del álgebra, en la formación de profesores a partir del REI. Resta ampliar el MPR con el fin de analizar si existen OM que puedan ser estudiadas a partir del REI y que permitan cubrir otros espacios curriculares correspondientes a los tres últimos años del programa de estudios.

Con la implementación del REI será posible introducir modificaciones en la concepción tradicional de la enseñanza a través de la *pedagogía de la investigación y el cuestionamiento del mundo* (Chevallard, 2013), por lo que esperamos implementarlo en una próxima fase en dos Institutos Superiores de Formación Docente de la ciudad de Bahía Blanca, provincia de Buenos Aires y posteriormente en nuevos contextos de formación docente, con la finalidad de que los futuros profesores puedan vivenciar a través del REI una enseñanza por investigación que devuelva el sentido a los conocimientos geométricos que son parte de su formación.

10. REFERENCIAS

Alsina, C. (1995). *Viaje al país de los rectángulos.* Santa Fé: Red Olimpia.

Bardales Estela, A. J. (2021). *Propuesta didáctica para el estudio de la homotecia con base en las aprehensiones en el registro figural con el apoyo del software geogebra.* Pontificia Universidad Católica del Perú.

Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER : problèmes et avancées.*

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad del Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education,* 2(2), 161-182. https://doi.org/https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

Colombo Rojas, E., Llanos, V. C., & Otero, M. R. (2016). La génesis histórica de la Geometría Analítica y la enseñanza en la Escuela Secundaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 93*, 93-100.

Escudero Perez, I. (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 379 - 391.

Eugui, N. (2023). *Enseñanza de la geometría en la escuela secundaria: análisis de los diseños curriculares de los últimos 160 años* . Tesis de licneciatura. UNICEN.

Galleguillos Bustamante, J., & Candia Cisternas, L. (2011). Uso de Herramientas interactivas en el aprendizaje de homotecias. *Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* Recife.

Gascón, J. (2004). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. *Suma*(45), 41-52.

González Flores, Y., Arias Gómez, I., & Picado Alfaro, M. (2020). La homotecia: análisis conceptual y análisis de contenido. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (págs. 283 - 294).

González Flores, Y., Arias Gómez, I., Picado Alfaro, M., & Valverde Soto, G. (2020). Diseño de una unidad didáctica para la enseñanza de la homotecia mediante la metodología del Análisis Didáctico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (págs. 696 - 704).

González Urbaneja, P. M. (2008). Euler y la Geometría Analítica. En *Quaderns d'Història de l'Enginyeria* (págs. 83-116).

Gualdrón, É. (2007). Conexión entre la semejanza, la homotecia y el teorema de Thales. Una experiencia con estudiantes de 14-15 años. *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* http://funes.uniandes.edu.co/11554/

Hoyos, V. (2006). Funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones Geométricas en la escuela secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 31 - 42.

Julio Barrera, L. J. (2014). *Las transformaciones en el plano y la noción de semejanza.* Universidad Nacional de Colombia.

Labra Peña, J., & Vanegas Ortega, C. (2022). Desarrollo del razonamiento geométrico de estudiantes de enseñanza media cuando abordan el concepto de homotecia. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.*

Lemonidis, C. (1990). *Conception, realisation et resultats d'une experience d'enseignement de l'homothetie.*

Ortiz A., J. A., & Angulo V., J. J. (2010). La homotecia, un tema casi olvidado en la enseñanza de la educación

Recepción:14/03/2023 *Aceptación: 25/10/2023*

matemática en Buenaventura: una propuesta desde el punto de vista algebraico. *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, (págs. 692 - 703).

Otero, M. R. (2021). *La formación de profesores: recursos para la enseñanza por indagación y el cuestionamiento.* Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Otero, M. R., & Gazzola, M. P. (2023). Recursos y enseñanza por indagación. El papel de los esquemas de los profesores de matemática en servicio. *Revista electrónica IARTEM, 15*(2). https://doi.org/10.21344/iartem.v15i2.999

Otero, M. R., Gazzola, M. P., & Llanos, V. C. (2021). Enseñar a partir de preguntas: la influencia de la posición institucional . *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*(2), 30-37.

Otero, M. R., Gazzola, M. P., & Llanos, V. C. (2023a). Génesis instrumental de profesores de matemática a partir de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI). *XVI CIAEM (Conferencia Interamericana de Educación Matemática).* Lima, del 30 de julio al 4 de agosto de 2023. Trabajo aceptado para su comunicación y posterior publicación en Actas.

Otero, M. R., Gazzola, M. P., & Llanos, V. C. (2023b). Trabajo documental de los profesores de matemática en servicio utilizando Recorridos de Estudio e Investigación. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, 18*(1), 149-167. https://doi.org/10.14483/23464712.18873

Palomino Romero, W. (2017). *Transformaciones del plano.* Lima.

Pérez, S., & Guillén, G. (s.f.). *Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza.* Departamento de Didáctica de la Matemática - Universitat de Valéncia.

Rubilar Crisóstomo, L. V. (2020). *Un estudio sobre semejanza geométrica, homotecia y teorema de Thales en el saber a enseñar de los últimos veinte años.* Santiago.

Ruiz Ledesma, E. F., & Lupiáñez, J. L. (2010). Empleo de la Geometría Dinámica como apoyo en actividades de lápiz y papel, para la comprensión de los tópicos de razón y proporción. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 207 - 233.

Salas Solano, B. (2013). Taller: Recomendaciones didácticas para el abordaje de los temas de homotecias y transformaciones isométricas en el tercer ciclo de la Educación General Básica. *IV Encuentro de Enseñanza de la Matemática.* UNED.

Sánchez Pesquero, C., Mendoza García, M., Casas García, L. M., Márquez Zurita, L., & Blanco Nieto, L. (1997). *Proporcionalidad geométrica y semejanza.* Síntesis.

Thaqi, X., & Giménez, J. (2014). Trayectorias Iniciales de Formación de Profesores. El Caso de las Transformaciones Geométricas. *REDIMAT, 3*(3), 253-275. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2014.53

Rabanedo, Paula:
Profesora en Matemática (UNS). Alumna de la Licenciatura en Educación Matemática de la UNICEN. Tema: Enseñanza de la Geometría en la formación de profesores.
Se desempeña como profesora en el nivel superior, tanto universitario como no universitario, en el ingreso a la universidad en carreras de grado de formación docente y de ingenieros y en la formación continua de docentes.