REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

EXPLORANDO A IDENTIDADE DE PADOVAN COM RECURSOS MANIPULÁVEIS: UMA EXPERIÊNCIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES POR MEIO DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Renata Passos Machado Vieira[1], Francisco Regis Vieira Alves[2], Paula Maria Machado Cruz Catarino[3]

re.passosm@gmail.com, fregis@gmx.fr, pcatarino23@gmail.com

[1] *Secretaria de Educação do Estado do Ceará, Fortaleza, Ceará, Brazil.*
[2]*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, Ceará, Brazil*
[3]*Universidade de Trás os Montes e Alto Douro, Vila Real, Portugal*

Resumo

Este estudo tem como objetivo primordial o ensino do modelo combinatório de Padovan em uma instituição de ensino superior. Ao analisar a ementa da componente curricular de História da Matemática e os conteúdos ministrados aos professores em formação inicial na área de Matemática, foi identificada uma lacuna no que diz respeito ao ensino de outras sequências numéricas recorrentes. Como resultado, propõe-se a investigação da sequência de Padovan, abordando seus aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos. Utilizando a Engenharia Didática como abordagem metodológica de pesquisa, amplia-se o campo epistêmico desses números matemáticos, destacando a evolução dessa sequência ao longo do tempo. Com base na Teoria das Situações Didáticas como referencial teórico, desenvolve-se uma situação de ensino que é implementada em sala de aula, possibilitando a análise experimental da pesquisa. Essa situação de ensino busca estimular o pensamento intuitivo dos alunos, promovendo uma compreensão mais profunda da sequência, enfatizando sua interpretação combinatória por meio do uso de materiais manipulativos. Por fim, este estudo oferece aos estudantes a oportunidade de estabelecer conexões epistemológicas com a sequência, com foco no ensino de História da Matemática em cursos de formação inicial de professores de Matemática. O objetivo principal é enriquecer o ensino desses conteúdos, preparando os futuros professores para abordarem de maneira mais abrangente o tema das sequências em suas práticas pedagógicas.

Palavras-chave: Engenharia Didática; sequências numéricas; Teoria das Situações Didáticas.

Explorando la identidad de Padovan con recursos manipulables: una experiencia de formación inicial docente a través de la ingeniería didáctica

Resumen

Este estudio tiene como objetivo principal la enseñanza del modelo combinatorio de Padovan en una institución de educación superior. Al analizar el programa de estudios del componente curricular Historia de las Matemáticas y los contenidos impartidos a los docentes en formación inicial en el área de Matemáticas, se identificó una brecha respecto a la enseñanza de otras secuencias numéricas recurrentes. Como resultado, se propone investigar la secuencia de Padovan, abordando sus aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos. Utilizando la Ingeniería Didáctica como enfoque metodológico de investigación, se amplía el campo epistémico de estos números matemáticos, destacando la evolución de esta secuencia a lo largo del tiempo. Tomando como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas, se desarrolla e implementa una situación de enseñanza en el aula, posibilitando el análisis experimental de la investigación. Esta situación de enseñanza busca estimular el pensamiento intuitivo de los estudiantes, promoviendo una comprensión más profunda de la secuencia, enfatizando su interpretación combinatoria mediante el uso de materiales manipulativos. Finalmente, este estudio ofrece a los estudiantes la oportunidad de establecer conexiones epistemológicas con la secuencia, centrándose en la enseñanza de la Historia de las Matemáticas en los cursos iniciales de formación del profesorado de Matemáticas. El objetivo principal es enriquecer la enseñanza de estos contenidos, preparando a los futuros docentes para abordar la temática de las secuencias de manera más integral en sus prácticas pedagógicas.

Palabras clave: Ingeniería Didáctica; secuencias numéricas; Teoría de Situaciones Didácticas.

Recepción:06/10/2023 *Aceptación:16/05/2025*

Exploring Padovan's identity with Manipulable Resources: An Experience in Initial Teacher Training through Didactic Engineering

Abstract

The main objective of this study is to teach Padovan's combinatorial model in a higher education institution. By analyzing the syllabus of the History of Mathematics curriculum component and the content taught to pre-service teachers in the area of Mathematics, a gap was identified regarding the teaching of other recurring numerical sequences. As a result, the study proposes to investigate Padovan's sequence, addressing its epistemological, cognitive and didactic aspects. Using Didactic Engineering as a methodological research approach, the epistemic field of these mathematical numbers is expanded, highlighting the evolution of this sequence over time. Based on the Theory of Didactic Situations as a theoretical framework, a teaching situation is developed and implemented in the classroom, enabling the experimental analysis of the research. This teaching situation seeks to stimulate students' intuitive thinking, promoting a deeper understanding of the sequence, emphasizing its combinatorial interpretation through the use of manipulative materials. Finally, this study offers students the opportunity to establish epistemological connections with the sequence, focusing on the teaching of History of Mathematics in initial teacher training courses in Mathematics. The main objective is to enrich the teaching of these contents, preparing future teachers to address the theme of sequences in a more comprehensive way in their pedagogical practices.

Keywords: Some Didactic Engineering; numerical sequences; Theory of Didactic Situations.

1. INTRODUÇÃO

O estudo de sequências numéricas recorrentes é de grande relevância no campo da História da Matemática, e a famosa sequência de Fibonacci é um exemplo notório desse fenômeno, cujas origens remontam à intrigante reprodução dos pares de coelhos imortais (Singh, 1985). No entanto, este campo de pesquisa oferece conexões significativas com outras sequências, notavelmente as sequências de Padovan e Perrin, que são consideradas primas das sequências de Fibonacci, conforme documentado por Vieira, Alves e Catarino (2019).

Observa-se que alguns autores de livros de História da Matemática tendem a destacar curiosidades relacionadas a sequências lineares e recorrentes, com ênfase na famosa sequência de Fibonacci (Gullberg, 1997; Grimaldi, 2012). No entanto, algumas dessas obras, como o trabalho de Gullberg (1997), muitas vezes se concentram exclusivamente no tópico dos pares de "coelhos imortais", deixando de lado importantes contribuições matemáticas e novas pesquisas evolutivas relacionadas a esses números. Portanto, é essencial compreender o contexto histórico que motivaram o desenvolvimento epistemológico e matemático de determinados objetos matemáticos, incluindo outras sequências recorrentes lineares. Além da sequência de Fibonacci, há um interesse significativo em abordagens alternativas e generalizações dessas sequências. A sequência de Fibonacci ganha destaque especial devido à sua relevância contemporânea, uma vez que esses números, que formam uma sequência de segunda ordem, estão intrinsecamente relacionados com o número de ouro, representado pela razão $\varphi \approx 1{,}61$, que é uma das raízes do polinômio característico de Fibonacci.

Nesse contexto, merece destaque a sequência de Padovan, uma sequência recorrente e linear de terceira ordem com uma notável relação com o número plástico (valor $\psi \approx 1{,}32$) (Padovan, 1994; Vieira, 2020). Além disso, há a sequência de Perrin, que também é uma sequência recorrente e linear de terceira ordem e compartilha a mesma recorrência que a sequência de Padovan, embora apresente termos iniciais diferentes. Os números de Perrin também estão relacionados ao número plástico (Alves et al., 2020a).

Diante da interligação entre essas sequências, surge a motivação para explorar outras sequências, impulsionando o desenvolvimento epistemológico e matemático delas. Assim, a evolução matemática de Perrin assume uma importância singular, proporcionando aos participantes desta pesquisa uma oportunidade única de estudar a construção do modelo combinatório por meio do material manipulável desenvolvido. Essa motivação justifica nosso interesse em propor uma abordagem de ensino voltada ao estudo das sequências de Padovan e Perrin, com ênfase no modelo combinatório desses números, utilizando material manipulável.

É importante ressaltar a contribuição do material manipulável, conhecido como Tabuleiro Mórfico, com o objetivo de tornar a análise da situação proposta mais acessível. Esse recurso tem como finalidade simplificar o estudo dos modelos combinatórios de Padovan e Perrin.

A pesquisa sobre o ensino da Matemática, com foco nas sequências numéricas recorrentes, é enriquecida por diversos estudos que adotam a Engenharia Didática (ED) como metodologia de pesquisa (Vieira, 2020; Oliveira, 2018). Nesse contexto de desenvolvimento do campo epistêmico-matemático, propomos uma situação-problema em sala de aula, fundamentada na metodologia de ensino da Teoria dos Situações Didáticas (TSD), a qual encoraja os estudantes a experimentarem diferentes estratégias de resolução. Essa abordagem instiga um aprendizado mais eficaz e significativo para os alunos, à medida que eles buscam soluções por conta própria.

A metodologia da Engenharia Didática (ED) desempenha um papel fundamental ao organizar os conhecimentos que serão aplicados na atividade. Ela inicia com a formulação de hipóteses, que são cuidadosamente analisadas. Essa abordagem permite uma transformação didática, organizando procedimentos metodológicos de pesquisa para serem aplicados em sala de aula. Por meio da proposição de diversas situações didáticas, almeja-se proporcionar aos estudantes a construção do conhecimento e a superação de obstáculos em diferentes tópicos da Matemática (Artigue, 1988).

A TSD, por sua vez, proporciona o acesso ao conhecimento matemático aos alunos, criando situações didáticas em sala de aula que estimulam o interesse dos

Recepción:06/10/2023 *Aceptación:16/05/2025*

participantes. Seguindo a perspectiva de Brousseau (2008), o professor desafia os estudantes ao criar desequilíbrios durante a resolução das situações didáticas, incentivando-os a encontrar soluções por si mesmos.

Nosso principal objetivo é responder à seguinte questão norteadora: Como conduzir um estudo acerca do modelo combinatório de Perrin por meio de situações didáticas de ensino em nível da formação de professores?

Nesse contexto, apresentamos a presente proposta, que envolve o desenvolvimento e construção de definições matemáticas por meio de situações didáticas de ensino relacionadas às sequências de Padovan e Perrin, destinadas a estudantes em formação inicial em Matemática. Ao explorar essas sequências, nosso objetivo é aprofundar o campo epistêmico-matemático desses números, enfatizando seu modelo combinatório por meio da aplicação e desenvolvimento de material manipulável. Essas situações didáticas são aplicadas em sala de aula com estudantes de uma Instituição de Ensino Superior em Fortaleza-CE, no curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina de História da Matemática. Os resultados obtidos serão analisados e comparados com as expectativas previamente estabelecidas. Assim, por meio da utilização tanto da ED quanto da TSD, buscamos oferecer aos participantes da pesquisa uma oportunidade única de explorar novas abordagens de ensino, aprofundando não apenas seu entendimento dos objetos matemáticos, mas também a forma como esses objetos são transmitidos e compreendidos.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Estudos recentes têm confirmado que a matemática desempenha um papel central na tradição de ensino francês, sendo diversos os fatores que contribuem para essa situação, destacando-se o envolvimento ativo de matemáticos franceses em questões educacionais (Gispert, 2014). Nesse contexto, o objetivo da presente pesquisa é explorar a tradição francesa de didática da Matemática, adotando a ED como metodologia de pesquisa. De acordo com Artigue et al. (1995), a ED é caracterizada como uma abordagem que envolve a elaboração e execução de sequências de ensino, seguidas de análise dos resultados obtidos, conforme as etapas definidas por essa metodologia no processo de pesquisa. Essas etapas incluem: Análise preliminar; Concepção e análise a priori; Experimentação; e Análise a posteriori e validação. A validação pode ocorrer tanto internamente, por meio da comparação entre as análises a priori e a posteriori, quanto externamente, envolvendo a comparação entre grupos experimentais e de controle (Benito, Silva & Bosh, 2022).

Essa abordagem é amplamente utilizada por pesquisadores franceses e de outras nacionalidades na área de Educação Matemática. A ED utiliza os resultados de pesquisa para desenvolver estratégias pedagógicas e materiais curriculares específicos para o ensino da matemática. No âmbito dessa metodologia, uma parte fundamental da atuação do professor é propor aos alunos problemas que envolvam o desenvolvimento da matemática (Artigue, 1988).

A TSD, possibilita projetar situações que permitam aos professores experimentarem, analisarem e refletirem sobre os mecanismos de ensino e aprendizagem. O foco da ED não visa ensinar matemática ao professor, mas sim criar um ambiente que provoque a reflexão didática sobre como esse conteúdo pode ser apresentado, explorado e compreendido pelos alunos. De fato, a aplicação da TSD foi voltada para o curso de licenciatura em Matemática, ou seja, formação inicial de professores. No entanto, isso não significa que seus princípios não possam ser transpostos para a formação continuada de professores.

Durante a fase das análises preliminares e em todas as etapas do projeto, é notável a influência da TSD na ED. Na fase das análises preliminares, observa-se a incorporação sistemática do componente epistemológico. O planejamento das tarefas e situações é realizado com foco na busca por situações que capturem a essência epistemológica da matemática a ser aprendida. Isso é feito para maximizar o potencial do ambiente de aprendizagem no sentido de promover a autonomia dos alunos e gerenciar os processos de descontextualização e institucionalização (Artigue & Perrin-Glorian, 1991).

Segundo Artigue e Glorian (1991), a ED surgiu na didática da matemática na França nos anos 80, com o objetivo de criar um método de trabalho didático semelhante ao de um engenheiro. Em contraste com os objetos refinados da ciência, os engenheiros lidam com objetos mais complexos, embasados no conhecimento científico, mas também precisam lidar com a aplicação prática desse conhecimento.

No contexto desta pesquisa, abordamos as conclusões de todas as etapas da ED. Inicialmente, conduzimos uma análise epistemológica da evolução das sequências de Padovan e Perrin. Em seguida, realizamos uma concepção e análise a priori, com base em um levantamento documental fundamentado no estado da arte das novas definições matemáticas das sequências em relação às abordagens combinatórias. Após essa base epistemológica e a concepção a *priori*, avançamos para a estruturação, elaboração e aplicação de uma situação didática de ensino, com o objetivo de contribuir para o ensino da sequência de Perrin. Em seguida, comparamos os dados previstos com os resultados obtidos, identificando e discutindo os avanços alcançados pelos participantes em relação ao modelo matemático proposto.

A pesquisa abrange diversas dimensões, incluindo a epistemológica, institucional e didática. A análise epistemológica examina o conteúdo no contexto de sua evolução histórica, ajudando a estabelecer metas e identificar possíveis obstáculos epistemológicos. Essa análise orienta a seleção de situações matemáticas representativas, conhecidas como "situações fundamentais" na terminologia da TSD, que desempenham um papel fundamental na aquisição do conhecimento desejado. A análise institucional considera o ambiente em que a ED é aplicada, identificando as condições e restrições que afetam o processo de ensino e aprendizagem. Essas influências podem se manifestar em diferentes níveis, conforme a hierarquia dos níveis de co-determinação proposta por Chevallard (2002). A análise didática concentra-se na construção das contribuições da pesquisa para o processo de ensino-aprendizagem do conteúdo em questão.

Conforme Artigue (2014):

> As análises preliminares geralmente incluem três Dimensões principais: uma análise epistemológica do conteúdo matemático em jogo, uma análise as condições e condicionantes que o ED irá enfrentar, e uma análise do que a pesquisa educacional tem a oferecer para apoiar o design (Artigue, 2014a, p. 160, tradução nossa).

Uma etapa crítica nessa abordagem é a fase de concepção e análise a priori, na qual, com base nas análises preliminares, as hipóteses de pesquisa são explicitadas e incorporadas na criação das situações didáticas. Durante essa fase de concepção, uma série de escolhas deve ser feita em diferentes níveis. Algumas dessas escolhas têm um impacto amplo no projeto (macro-escolhas), enquanto outras se aplicam a situações específicas (micro-escolhas). Essas decisões influenciam as variáveis didáticas, resultando em variáveis de macrodidática (macro-escolhas) e microdidática (micro-escolhas), que afetam o ambiente de aprendizagem e, consequentemente, as interações entre os alunos e o conhecimento, entre os próprios alunos e entre os alunos e o professor. Além disso, essas escolhas também determinam as oportunidades específicas que os alunos têm para aprender, incluindo o como e o que podem aprender.

Durante a fase de experimentação, ocorre a coleta de dados para análise posterior. A natureza dos dados coletados varia de acordo com os objetivos estabelecidos pela abordagem de ensino, as hipóteses testadas e as conjecturas desenvolvidas na fase de concepção e análise a priori. No entanto, a coleta de dados é conduzida com um foco especial, permitindo ao pesquisador compreender a interação dos alunos com o ambiente e até que ponto essa interação apoia sua transição autônoma das estratégias iniciais para as estratégias desejadas (Costa & Gonçalves, 2022). Além disso, realiza-se uma análise dos processos de descontextualização e institucionalização.

Artigue (2014a) afirma

> Durante a fase de realização, os dados são coletados para análise a posteriori. A natureza desses dados depende dos objetivos precisos do ED, das hipóteses testadas e das conjecturas feitas na concepção e análise a priori. A realização pode levar a alguma adaptação do projeto em curso, especialmente quando o ED é de tamanho substancial. Essas adaptações são documentadas e levadas em consideração na análise a posteriori (Artigue, 2014a, p. 160, tradução nossa).

Durante a fase de análise posterior, os dados previamente coletados são organizados e comparados com os dados obtidos na fase de concepção e análise a priori. A validação da pesquisa, como destacado por Laborde (1997), envolve "uma descrição geral da classe ou dos comportamentos e tipos de produção predominantes na classe, o estudo de sua evolução e a verificação de sua adequação em relação ao que é esperado dos estudantes".

A TSD teve sua origem na década de 60 com Brousseau, que liderou e continuou a desenvolver os estudos desde então. Desde o seu início, a TSD adota uma abordagem sistêmica, considerando a Didática da Matemática como o estudo das condições que permitem a disseminação e a apropriação do conhecimento matemático por meio das instituições de ensino.

A TSD enfatiza a importância da Matemática e de sua análise epistemológica, abordando conceitos como obstáculos epistemológicos e situações fundamentais. Obstáculos epistemológicos são formas de conhecimento que foram eficazes em contextos específicos, mas tornaram-se inadequadas ao longo do tempo. Por outro lado, as situações fundamentais são situações matemáticas em que um conceito é melhor compreendido como uma solução ideal. Essa análise epistemológica das situações matemáticas constitui a base da teoria das situações matemáticas, um primeiro nível de modelagem na TSD. O segundo nível envolve as situações didáticas, conforme proposto por Brousseau (1986).

Brousseau (1986) estabelece quatro fases na situação didática: ação, formulação, validação e institucionalização. Na fase da ação, o estudante desenvolve estratégias para resolver a atividade proposta (situação-problema), buscando compreender a questão por si mesmo. Brousseau (2002) define uma situação-problema como uma questão subjetiva com enunciados claros e objetivos. A interação contínua entre o estudante e o ambiente é conhecida como dialética da ação, onde o estudante organiza estratégias e constrói representações para guiar suas decisões diante da situação proposta (Brousseau, 1986).

Durante a fase de formulação, ocorre a discussão em grupo sobre as estratégias desenvolvidas na fase anterior da ação. Brousseau (2002) descreve que:

> Uma dialética de formulação consistiria em estabelecer progressivamente uma linguagem em que todos pudessem compreender, que levasse em conta os objetos e as relações relevantes da situação de maneira adequada (ou seja, permitindo raciocínios e ações úteis). A cada momento, essa linguagem construída seria testada do ponto de vista da inteligibilidade, da facilidade de construção e da extensão das mensagens que permite a troca. A construção de tal linguagem ou código (repertório, vocabulário, às vezes sintaxe) em uma linguagem comum ou uma linguagem formalizada possibilita a explicação de ações e modelos de ação. (Brousseau, 2002, p. 12, tradução nossa).

Na etapa de validação, é essencial elaborar e apresentar a avaliação de forma adequada, frequentemente por escrito, para possibilitar a comparação com outras avaliações escritas que tratam da mesma situação. Geralmente, a formulação da avaliação só se torna possível após ter sido empregada e testada como uma regra implícita, seja durante a ação ou nas discussões (Brousseau, 2022).

> O esquema didático de validação motiva os alunos a discutir uma situação e favorece a formulação de suas validações implícitas, mas seu raciocínio é muitas vezes insuficiente, incorreto, desajeitado. Adotam teorias falsas, aceitam provas insuficientes ou falsas. A situação didática deve levá-los a evoluir, a rever suas opiniões, a substituir sua falsa teoria por uma verdadeira. Essa evolução também tem um caráter dialético; uma hipótese deve ser suficientemente aceita - pelo menos provisoriamente - até mesmo para mostrar que é falsa (Brousseau, 2002, p. 17, tradução nossa).

A fase de institucionalização emerge como uma necessidade para consolidar as práticas e sua aplicação em diversos contextos. Portanto, é crucial que o estudante atribua significado à construção do conhecimento que ele mesmo manipulou (Brousseau, 1986). Nessa etapa final, ocorre a revelação da intenção subjacente ao problema apresentado pelo professor, validando assim as discussões realizadas pelos estudantes nas fases anteriores. A caracterização da atividade de definição é alcançada por meio da representação utilizando o material manipulável desenvolvido, que descreve o funcionamento da matemática. Isso é abordado no contexto do modelo de Balacheff (1995), que se fundamenta na TSD de Brousseau (1986).

3. A FASE DAS ANÁLISES PRELIMINARES

Nesta seção, realizamos uma revisão bibliográfica centrada na noção de tabuleiro e nos modelos combinatórios relacionados a sequências. Esse processo envolve a identificação de trabalhos que abordam tanto a Matemática Pura quanto a História da Matemática, com o objetivo de aprofundar nossa compreensão sobre a origem dessas sequências. Dentro desse contexto, selecionamos estudos que exploram a noção de tabuleiro, suas propriedades e outros conceitos matemáticos relevantes. Nosso enfoque epistemológico visa transformar esses elementos em conteúdo adequado para o ensino aos estudantes.

Inicialmente, exploramos o estudo de sequências numéricas recorrentes, exemplificadas pela famosa sequência de Fibonacci. Nossa abordagem se concentra principalmente em sua história, embora reconheçamos que outros aspectos significativos de sua contribuição matemática possam ser explorados (Grimaldi, 2012). Uma sequência numérica recorrente pode ser conceituada como uma série infinita de termos, cujo cálculo depende de uma fórmula de recorrência. Além disso, alguns termos iniciais são definidos com base na ordem da sequência. Para ilustrar, a sequência de Fibonacci é considerada uma sequência de segunda ordem. Seu aspecto combinatório é estudado em diversos trabalhos, como os de Koshy (2001), Spivey (2019) e Benjamin e Quinn (2003).

É importante destacar a concepção de um tabuleiro, proposta por Spreafico (2014), que consiste em um conjunto de quadrados denominados células. Essas células são numeradas e descrevem posições específicas. Os autores apresentam f(n) como a quantidade de maneiras de ladrilhar um tabuleiro de 1 x n, usando quadrados de 1 x 1 e dominós de 1 x 2. Isso leva ao modelo combinatório de Fibonacci, onde $f(n) = F(n+1)$, sendo F(n) o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci.

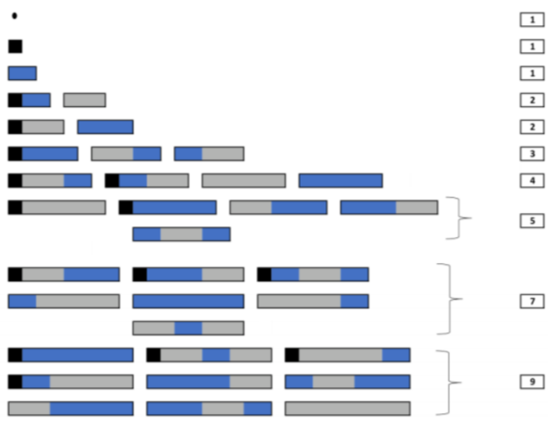
Além disso, é relevante recapitular alguns elementos relacionados à sequência de Padovan. Esta sequência é linear, recorrente e de terceira ordem, definida pela relação de recorrência $P(n) = P(n-2) + P(n-3)$, para $n \geq 3$, com valores iniciais $P(0) = P(1) = P(2) = 1$. Originalmente, a sequência de Padovan foi definida pelo arquiteto italiano Richard Padovan (1935). No entanto, há registros indicando que esses números foram explorados por Gérard Cordonnier e Hans Van der Laan durante suas investigações sobre o número plástico (Vieira, 2020). Os números de Padovan foram estudados pela primeira vez em 1924 pelo estudante de arquitetura francês Gérard Cordonnier (1907-1977) e também são conhecidos como sequência de Cordonnier. No entanto, esses números foram revisados e pesquisados pelo francês Hans Van der Laan (1904-1991), estabelecendo uma conexão histórica entre Cordonnier, Padovan, Van Der Laan e Stewart. Vale ressaltar que Richard Padovan publicou em seu livro a sequência como sendo de autoria de Van der Laan (Padovan, 1994).

A partir dessa base, conduzimos pesquisas na literatura buscando trabalhos que abordem as perspectivas combinatórias das sequências de Padovan, destacando os estudos de Tedford (2019) e Vieira, Alves e Catarino (2022).

No estudo realizado por Tedford (2019), é apresentada uma interpretação combinatória da sequência de Padovan por meio de ladrilhamentos. O autor introduz duas peças para esse propósito: dominós cinzentos, com dimensões de 1 x 2; e triminós brancos, com dimensões de 1 x 3. Com base nesses elementos, ele define como possível a configuração de ladrilhamento em um tabuleiro de tamanho n e p(n) a quantidade de maneiras de ladrilhar num tabuleiro de Padovan. Dessa forma, o teorema relacionado ao modelo combinatório de Padovan pode ser estabelecido com base na seguinte fórmula: $p(n) = P(n-2)$, sendo P(n) o n-ésimo termo da sequência de Padovan e $n \geq 1$.

No trabalho de Vieira, Alves e Catarino (2022), um modelo combinatório foi desenvolvido para a sequência de Padovan. Nesse modelo, eles conseguiram gerar os termos da sequência diretamente, sem a necessidade de considerar atrasos. Para isso, os autores introduziram um elemento adicional, um quadrado preto de tamanho 1 x 1. Além disso, eles estabeleceram uma regra de configuração que define como essa nova peça pode ser inserida e manipulada. Consequentemente, o quadrado preto só é permitido ser inserido uma única vez, e quando é inserido, ocorre somente no início da configuração da peça. Assim, temos $p(n) = P(n)$, para $n \geq 0$. A Figura 1 apresenta a interpretação combinatória dos valores iniciais de n.

Figura 1 – Modelo Combinatório de Padovan



Fonte: Vieira, Alves e Catarino (2022)

Nesse contexto, a pesquisa empreende uma investigação focada em uma identidade, a qual é demonstrada por meio do modelo combinatório de Padovan. Em seguida, é formulada uma situação-problema que apresenta o estudo dessa identidade de Padovan.

4. A FASE DA CONCEPÇÃO E ANÁLISE A *PRIORI*

Durante as fases iniciais da pesquisa, desenvolvemos uma interpretação combinatória da sequência de Padovan no contexto da construção do campo epistêmico-matemático. A partir dessa interpretação, elaboramos uma situação-problema que enfatiza a concepção das situações didáticas fundamentais, definidas por meio da variável microdidática, estabelecendo uma ligação entre os processos matemáticos abordados na sequência e a situação-problema proposta. É importante ressaltar que uma situação-problema é uma questão discursiva com um enunciado claro e objetivo, cujo propósito é aplicar os objetivos matemáticos de forma implícita e, posteriormente, explícita, permitindo que sejam alcançados por meio da resolução de problemas (Brousseau, 1986).

Assim, conduzimos uma investigação e exploração de definições matemáticas, que são inéditas nesta pesquisa, no contexto do ensino de História da Matemática, utilizando a ED e a TSD. A associação da epistemologia dos conceitos matemáticos desenvolvidos foi crucial para a escolha da componente curricular de História da Matemática, permitindo uma análise da evolução algébrica da sequência de Padovan. Dessa forma, optamos por adotar a interpretação combinatória da sequência, o que resultou na criação de uma situação-problema que envolve o estudo da identidade matemática para o modelo combinatório de Padovan.

Para tornar a análise da situação proposta mais acessível, desenvolvemos o Tabuleiro Mórfico, um material manipulável concebido especificamente para a sequências de Padovan. Esse tabuleiro é composto por peças ampliadas feitas de MDF. Ele inclui uma caixa para armazenar as peças e um encaixe para o próprio tabuleiro, o que torna mais fácil a exploração das características combinatórias dessa sequência. Essa abordagem visual e combinatória ajuda na compreensão das sequências numéricas e, consequentemente, o Tabuleiro Mórfico se apresenta como um recurso valioso para aprimorar o processo de ensino.

Dessa forma, desenvolvemos uma situação-problema que se relaciona ao conteúdo explorado no campo epistêmico-matemático, com o objetivo de analisar as variáveis microdidáticas e o potencial comportamento dos participantes da pesquisa.

É relevante destacar que, para resolver essa situação-problema, os estudantes têm a oportunidade de construir o modelo combinatório de Padovan, baseando-se no estudo desse modelo e na demonstração da identidade associada a ele. Enquanto exploram o modelo combinatório de Padovan, que é parte integrante da situação proposta, os estudantes devem investigar as definições iniciais, contribuindo assim para a formação de noções preliminares. Essas noções podem ser consideradas como ideias que emergem durante a resolução da atividade. A síntese realizada durante essa fase proporciona uma compreensão das concepções dos estudantes sobre as definições matemáticas, bem como a avaliação das mudanças ao longo de experimentos subsequentes, que abrangem diferentes conceitos matemáticos e tipos de problemas. Essa abordagem robusta contribui para a construção de uma base sólida em matemática, além de ser valiosa para identificar as concepções dos estudantes sobre o conceito matemático em análise, capacitando-os a compreender e abordar problemas matemáticos propostos.

Na situação-problema em questão, serão analisadas as seguintes variáveis: a sequência de Padovan, o modelo combinatório de Padovan e a identidade de Padovan. A atividade concentra-se no estudo de uma identidade de Padovan relacionada à sua interpretação combinatória.

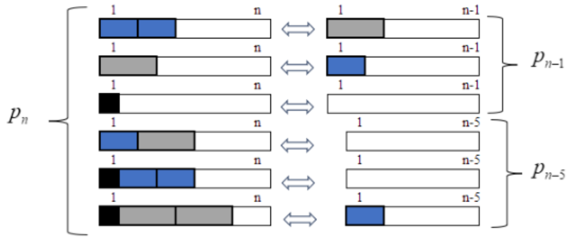
Situação-problema: Com base nos estudos realizados acerca do modelo combinatório de Padovan, demonstre, por meio dos ladrilhos e do tabuleiro mórfico, a identidade $p(n)=p(n-1)+p(n-5)$, para $n\geq 5$.

Fase da ação: Este é o momento em que os estudantes se deparam com a atividade proposta e mobilizam seus conhecimentos prévios em busca de métodos para resolver o desafio apresentado. Durante essa fase, os participantes precisam compreender o modelo combinatório de Padovan, examinando a sua demonstração utilizando o tabuleiro mórfico como ferramenta auxiliar. É crucial também que, nesse estágio, os alunos sejam capazes de verificar a validade da identidade por meio dos ladrilhamentos, interpretando os valores iniciais de n com as peças disponíveis.

Fase da formulação: Nessa etapa, os participantes são conduzidos a uma observação detalhada dos ladrilhos referentes aos casos iniciais do modelo combinatório de Padovan. Isso lhes permite identificar as peças que se iniciam em cada cenário para n (generalizado). Essa análise detalhada se torna essencial para a validação posterior da identidade proposta.

Fase da validação: Os estudantes devem realizar um mapeamento, construindo uma bijeção entre os conjuntos que contém os ladrilhamentos de p(n) e p(n-1) ∪ p(n-5) (ver Figura 2).

Figura 2 – Mapeamento de p(n) para p(n-1) e p(n-5)



Fonte: Elaborado pelos autores

Desse modo, devem observar que qualquer n−tabuleiro que começa com dois dominós é mapeado para um tabuleiro de tamanho n−1 onde os dois dominós foram substituídos por um triminó.

Se um n− tabuleiro começa com um triminó, então ele é mapeado para um tabuleiro de tamanho n − 1 onde o triminó foi substituído por um dominó. Caso o n−tabuleiro comece com um quadrado preto, esse é mapeado para um tabuleiro de tamanho n − 1, retirando o quadrado preto. Qualquer n−tabuleiro que começa com um quadrado preto seguido de dois dominós, é mapeado para um tabuleiro de tamanho n−5 removendo os três ladrilhos. Qualquer n−tabuleiro que começa com um quadrado preto seguido de dois triminós, é mapeado para um tabuleiro de tamanho n−5 substituindo os ladrilhos por um dominó. Finalmente, qualquer n−tabuleiro que começa com um dominó e depois um triminó é mapeado para um tabuleiro de tamanho n−5, excluindo o dominó e o triminó. Desse modo, pode-se visualizar que esta é uma bijeção entre os conjuntos p(n) e p(n-1) ∪ p(n-5). Assim, $p(n) = p(n-1) + p(n-5)$.

Fase da institucionalização: Nesse estágio, o papel central do professor volta à tona à medida que ele analisa as soluções apresentadas pelos estudantes e compartilha os objetivos da atividade proposta. Isso resulta na elaboração do modelo combinatório de Padovan e na exploração da identidade através do uso de ladrilhamentos.

Dessa forma, essa pesquisa se destaca pelo seu enfoque na análise da identidade de Padovan sob uma abordagem combinatória. É notável como os participantes podem abordar os conceitos matemáticos, utilizando ladrilhamentos e aproveitando o material manipulável como uma ferramenta didática para enriquecer significativamente o processo de ensino.

5. A FASE DA EXPERIMENTAÇÃO

A fase de experimentação ocorreu no *campus* Fortaleza do Instituto Federal de Educação, Ciência e

Recepción:06/10/2023 *Aceptación:16/05/2025*

Tecnologia do Estado do Ceará, no âmbito do curso de Licenciatura em Matemática. Durante essa etapa, optou-se por observar a componente curricular de História da Matemática, que contava com um grupo de 11 alunos matriculados. A pesquisa transcorreu ao longo de 2 semanas, abrangendo 4 aulas, cada uma com uma duração de 2 horas por aula.

É relevante salientar que houve um planejamento meticuloso das atividades a serem propostas, levando em consideração a situação didática de ensino, o qual incluiu a elaboração de uma lista de atividades e a utilização de recursos manipulativos. Durante as aulas, foram promovidas interações ativas entre os participantes, visando o desenvolvimento de estratégias de resolução, as quais foram explicadas e aplicadas com auxílio do material disponível. Nesse contexto, estabeleceu-se um contrato didático, no qual as expectativas do professor em relação aos alunos e, reciprocamente, as dos alunos em relação ao professor, foram discutidas e acordadas. As interações entre os saberes e a maneira como o conhecimento foi construído e manejado por ambas as partes também receberam cuidadosa atenção.

Esta etapa se destacou pela aplicação completa da estrutura metodológica já delineada até aquele ponto, com o propósito de observar a situação de ensino e explorar os conceitos previamente planejados na pesquisa didática. É importante mencionar que essa abordagem não seguiu o formato convencional de uma aula tradicional (PAIS, 2001). A organização das aulas, nessa fase, teve como base a TSD e estava voltada para a coleta de dados dos alunos, permitindo a análise do processo de ensino. Para a obtenção desses dados, foram empregados métodos de gravação de áudio e fotografia durante as discussões realizadas nas aulas analisadas. Ressalta-se que todos esses registros foram realizados com a devida autorização dos estudantes, que consentiram voluntariamente e com total compreensão do propósito dos materiais coletados.

Esse enfoque inovador permitiu a contribuição do material manipulável para tornar o conteúdo matemático mais acessível no contexto de ensino, facilitando a visualização dos termos da sequência ao construir suas definições.

Após o preparo, foram ministradas 4 aulas expositivas para os estudantes do curso de Formação Inicial de professores, abordando sequências numéricas recorrentes, incluindo a conhecida sequência de Fibonacci, a noção de tabuleiro e o modelo combinatório de Padovan. O propósito dessas aulas foi fornecer aos participantes uma base sólida em matemática para a construção da definição do modelo combinatório da sequência investigada.

Em seguida, foi elaborada uma situação-problema e analisados os possíveis comportamentos dos estudantes durante sua aplicação, em conformidade com os princípios da TSD. Essa etapa marcou a implementação da segunda fase da ED.

Prosseguindo no procedimento metodológico, a atividade proposta foi experimentada no curso de Formação Inicial de professores de Matemática, avançando assim para a terceira fase da ED. Durante a experimentação, os participantes foram observados e analisados à luz da TSD, e os dados coletados foram registrados e armazenados para posterior análise na pesquisa.

Por fim, os dados previstos foram confrontados com os dados aplicados e validados, considerando a validação interna da ED, marcando assim a conclusão da quarta e última fase do processo metodológico.

6. A FASE DA ANÁLISE A *POSTERIORI* E VALIDAÇÃO

Durante a fase de implementação, é crucial destacar a capacidade de realizar correções e ajustes específicos, priorizando os elementos mais relevantes para a pesquisa ao longo do processo experimental. É fundamental enfatizar que, após a etapa de experimentação, há um retorno à análise posterior, na qual os resultados obtidos são minuciosamente avaliados e examinados. Isso implica na exploração dos dados para contribuir para o desenvolvimento do conhecimento didático no processo de transmissão do conteúdo.

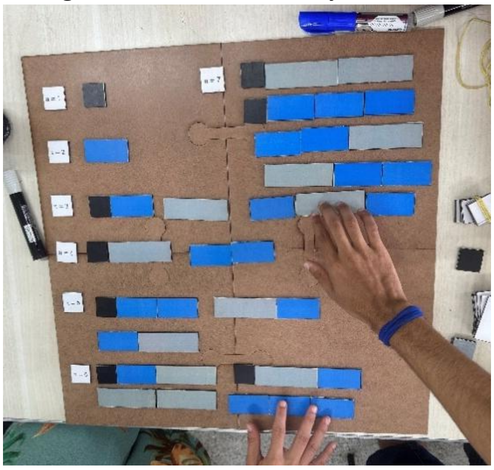
Após a análise posterior, é essencial proceder com a validação dos elementos utilizados durante a fase experimental na ED. Essa validação inclui a comparação dos resultados discutidos pelos estudantes, a formulação de questionamentos pertinentes e a análise da evolução da abordagem proposta pela engenharia. A situação-problema discutida desempenha o papel de variável microdidática, envolvendo a organização específica de uma sessão ou etapa da experimentação.

A execução da atividade teve início com a explanação sobre a sequência de Fibonacci, sua abordagem combinatória e aspectos evolutivos matemáticos. Em seguida, foi analisada algumas propostas numéricas da sequência de Padova, seus aspectos históricos para a apresentação do modelo combinatório desses números. Por fim, ocorreu a distribuição de uma lista de atividades e a apresentação das instruções para manipular o material didático diante da identidade combinatória apresentada. A validação foi realizada por meio da criação de uma situação didática apresentada aos alunos com o objetivo de estimular uma abordagem investigativa. Essa atividade tinha como propósito desenvolver a compreensão dos conceitos necessários para resolver o problema e formular definições. No contexto dessa situação-problema, os participantes conseguiram compreender o modelo combinatório de Padovan e sua identidade, discutido de acordo com a variável didática. É importante destacar que a validação foi realizada internamente, sem comparações com outras aplicações ou ambientes externos.

Em seguida, são realizadas uma análise detalhada e uma discussão embasada nos registros cuidadosamente coletados durante as aplicações. A abordagem concentra-se na avaliação dos aspectos da ED e nos princípios da TSD, validando internamente os resultados deste estudo. Para isso, começa-se com a apresentação do material manipulável e a descrição das orientações para desenvolver a identidade referente ao modelo combinatório de Padovan, juntamente com a representação do próprio modelo. Posteriormente, são explicadas as regras de construção, bem como as peças disponíveis.

Durante a fase da ação, os estudantes optaram por reconstruir o modelo combinatório de Padovan, para visualizarem a demonstração por meio da interpretação combinatória. A Figura 3, mostra a interpretação combinatória finalizada pelos estudantes A1, A3 e A5.

Figura 3 – Início da fase da ação



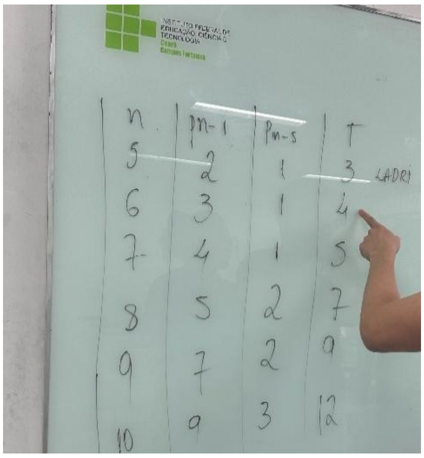
Fonte: Acervo da pesquisa

Ainda na fase da ação, os estudantes A2, A6, A7, A8 e A9 iniciam uma discussão em torno da identidade:

> A9: Vamos ver agora se essa regra se aplica para identidade da questão?
> A2: Boa, vamos lá!
> A7: A gente vai fazer no quadro ou com as peças? É melhor no quadro.
> A6: Não, vamos fazer com as peças depois a gente tenta ir fazendo pra mais casos no quadro.
> A8: Então, olha só... se eu pegar o p(5) ele tem que dar igual a p(4) + p(0). Bate?
> A9: p(6) tem 4 formas de ladrilhar e p(5) tem 3, mais o p(1) tem 1. Bateu! Vamos fazer pra n=7.
> A7: Dá certo também! Fica 5 pro p(7) e p(6) com 4 e p(2) com 1 também. Fecha!
> A6: Bora pro quadro fazer uma tabela maior e pra gente organizar melhor as ideias!
> A2: Beleza! Mas coloca do 5 de novo, pra gente não se perder.

Então os estudantes optam por irem ao quadro e verificarem a identidade com a construção da tabela como mostra a Figura 4 para os demais valores de n. Assim, pode-se observar a fase da ação sendo concluída pelos estudantes, observando ainda uma discussão em torno da identidade, para assim conseguirem avançar na fase seguinte.

Figura 4 – Fase da ação



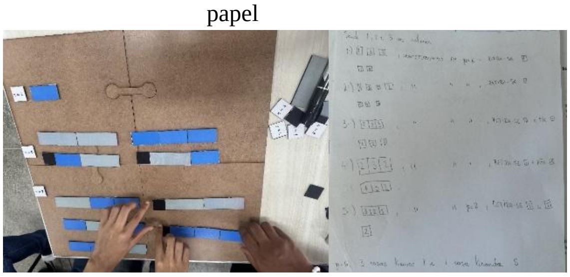
Fonte: Acervo da pesquisa

Na fase da formulação os estudantes iniciam outra discussão

> A4: No caso a gente tem que tirar 5, 5 unidades. Então a gente tem que começar do n=5. Então vamos olhar pro final das peças.
> A10: A gente tem que tirar do começo, porque se a gente for tirar do final, não tem como a gente garantir que vai terminar assim.
> A11: Vamos anotando o que tamo tirando e incluindo pra fazer o mapeamento, porque a gente vai esquecer.
> A1: Isso!
> A9: A gente pode acrescentar ou tirar.
> A11: É! Eu anotei aqui os passos que vocês foram fazendo.

A Figura 5A mostra os estudantes iniciando a fase da formulação com a realização do mapeamento das peças para alguns valores de n. A Figura 5B apresenta a formulação pelos estudantes escrita diante da discussão e manuseio das peças pelo estudante A11.

Figura 5 – Fase da formulação (5A) pelo tabuleiro e (5B) pelo papel



Fonte: Acervo da pesquisa

Na fase da validação, os estudantes continuam a discussão realizada na fase anterior, a fim de obter a demonstração da identidade.

> A1:Vamos ver o que a gente tirou e o que a gente colocou pra poder demonstrar
> A11: Vamos generalizar esses casos de n que a gente olhou
> A3: Eu vou ter 3 casos tirando 1 e um caso tirando 5
> A5: Não, fica 3 e 3. 3 casos tirando 1 e 3 casos tirando 5. Porque olha, as peças só podem ser o que?
> A11: Começando, né?
> A3: Isso!
> A11: Então tem: dominó e dominó, triminó, quadrado preto, dominó e triminó, triminó e

Recepción:06/10/2023 *Aceptación:16/05/2025*

dominó, quadrado e dois dominós, quadrado e dois triminós.

A9: Mas olha só o dominó e triminó, triminó e dominó são as mesmas coisas.

A7: Então ficam só dominó e dominó, triminó, quadrado preto, dominó e triminó, quadrado e dois dominós, quadrado e dois triminós.

Com isso, o aluno A5 resolve ir ao quadro e apresentar o seu mapeamento de p(n) para p(n-1) para os demais colegas, como pode-se visualizar na Figura 6. Em seguida, alguns estudantes questionam sobre a sua resolução, resultando na seguinte discussão

A11: Não, fica assim: quadrado preto com dominó, dominó, quadrado preto e triminó e triminó.

A3: Mas se tu observar o quadrado preto com dominó resulta em dominó e o restante da peça. E do mesmo jeito acontece pro caso do quadrado preto e triminó, fica só o triminó. Por isso que a gente tava falando que o caso é só começando com quadrado preto, porque quando a gente vai fazer o mapeamento pra n-1, é só retirar o quadrado preto e fica o restante da peça de boa.

A5: Ah! Entendi!

A7: E o dominó a gente analisa ele com outro dominó ou ele sozinho. Porque aí fica a mesma coisa no final das contas.

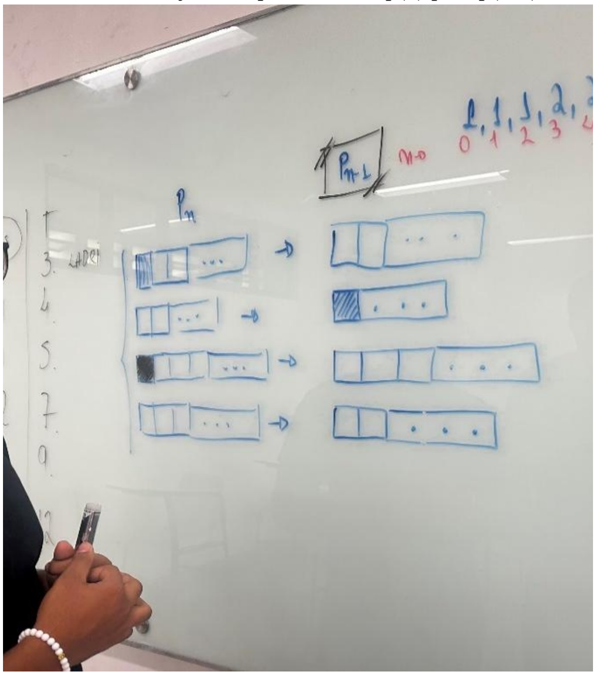
A5: Beleza! Então ficam os casos assim, olha: dominó e dominó, triminó, quadrado preto, dominó e triminó, quadrado e dois dominós, quadrado e dois triminós.

A11: É o que a gente tinha visto já.

A5: Ah! É porque eu não tinha entendido muito bem, mas agora deu certo.

A discussão mostra que o obstáculo encontrado pelo aluno A5 foi superado após o compartilhamento das ideias com os colegas, permitindo avançar no conhecimento matemático em análise.

Figura 6 – Fase da validação - mapeamento de p(n) para p(n-1)



Fonte: Acervo da pesquisa

Para a realização do mapeamento p(n) para p(n-5) o estudante A10 foi até o quadro para apresentar a sua ideia aos demais colegas, porém como mostra a Figura 7, pode-se notar que o mesmo apresentou um pequeno equívoco ao mapear o ladrilhamento iniciando com o quadrado preto com dominó e triminó e o ladrilhamento iniciado com o quadrado preto seguido com o triminó e o dominó. Esse erro dar-se pelo fato de retirar as peças do dominó e triminó, resultando somente no quadrado preto, o que seria justamente a peça iniciada com o quadrado preto. Assim, os participantes iniciam uma nova discussão

A7: Então fica as peças iniciando com: quadrado preto e dois dominós, triminó e dominó, dominó e triminó, quadrado preto com dominó e triminó, quadrado preto com triminó e dominó?

A10: Isso! A meu ver sim!

A11: Fica não. Tá faltando ainda. Falta ainda o caso do quadrado preto com dois triminós, que mapeado pra n-5 a gente troca as peças por um dominó só.

A1: E o quadrado preto com o dominó e triminó tá certo também, né não?

A2: Não, porque olha só se tu tirar as peças do meio aí volta pro caso do quadrado preto, então fica redundante falar disso.

A8: Eita! Verdade! Então fica só dominó com triminó, quadrado preto e dois dominós e quadrado preto e dois triminós.

A11: É. Aí o mapeamento fica de dominó com triminó a gente tira as duas peças e deixa só o restante.

A2: Triminó e dominó não conta porque é a mesma coisa de dominó e triminó.

A11: Isso! E o quadrado preto com dois dominós, tira tudo também e fica só o resto da peça.

A9: Aí pra quadrado preto e dois triminós a gente vai tirar tudo e substituir por um dominó só. E claro, o resto da peça.

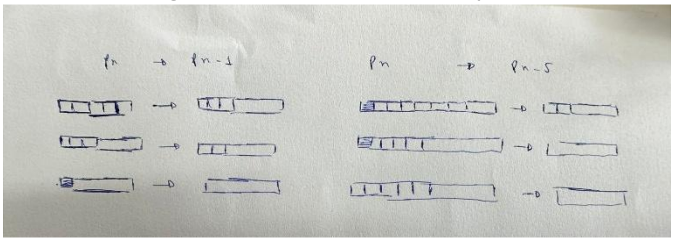
A11: Fechou então os mapeamentos!

Figura 7 – Fase da validação - mapeamento de p(n) para p(n-5)

Fonte: Acervo da pesquisa

Após os apontamentos realizados, foi possível concluir o mapeamento de p(n) e p(n-1) ∪ p(n-5) resultando na Figura 8, finalizando assim a fase da validação pelo estudante A11.

Figura 8 – Final da fase da validação



Fonte: Acervo da pesquisa

Com isso, finaliza-se a análise da situação-problema, onde o professor avalia os acertos e erros cometidos pelos estudantes, apresentando a institucionalização da atividade proposta.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Olhar para trás agora, depois de tudo que foi vivido e construído ao longo desta pesquisa, é como revisitar um caminho cheio de descobertas, dúvidas, surpresas — e muita aprendizagem. O que começou com uma curiosidade sobre a sequência de Padovan acabou se tornando algo muito maior: uma experiência de repensar o ensinar e o aprender Matemática, especialmente na formação de futuros professores.

A sequência de Padovan, com sua beleza discreta e estrutura pouco conhecida, foi o ponto de partida. No começo, parecia apenas um conteúdo interessante, mas ao estudá-la com mais profundidade, percebemos o quanto ela podia abrir portas para discutir combinatória, lógica, criatividade... e também o quanto esse tipo de abordagem ainda está ausente na formação matemática que recebemos.

Escolhemos trabalhar com a Teoria das Situações Didáticas (TSD) justamente por isso. Sabíamos que ela é mais comum no ensino básico, mas queríamos arriscar. Queríamos ver o que aconteceria se colocássemos futuros professores para viver uma situação didática, não como quem ensina, mas como quem aprende. E o que vimos foi transformador.

Mais do que aprender sobre uma sequência numérica, eles foram convidados a pensar sobre o próprio ato de ensinar. A sentir o que é estar diante de um problema novo, a experimentar, a errar, a ajustar o olhar. A se colocar no lugar do aluno. E isso fez toda a diferença.

A TSD, neste trabalho, não foi usada para ensinar Matemática aos professores — mas para ajudá-los a pensar sobre como ela pode ser ensinada com mais sentido, mais intencionalidade e mais escuta. Porque ensinar não é só transmitir conteúdos: é construir espaços onde o outro possa descobrir, se desafiar, crescer.

O mais bonito de tudo foi perceber que a proposta funcionou. Que esses futuros professores saíram da experiência não só com mais conhecimento, mas com um olhar mais atento sobre a prática docente. Um olhar mais cuidadoso, mais questionador, mais aberto.

No fim das contas, talvez essa tenha sido a maior conquista deste trabalho: mostrar que, quando o professor se permite também ser aprendiz, ele se torna mais sensível, mais criativo e mais humano no seu ensinar. E é isso que a escola precisa. É isso que os alunos precisam. E é isso que, como formadores, queremos ajudar a construir.

8. AGRADECIMENTOS

A parte de desenvolvimento de pesquisas no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

A vertente de desenvolvimento da investigação em Portugal é financiada por Fundos Nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia. I. P, no âmbito do projeto UID / CED / 00194/2020.

9. REFERÊNCIAS

Alves, F. R. V.; Catarino, P. M. M. C.; Vieira, R. P. M.; Mangueira, M. C. dos S. (2020). Teaching recurrent sequences in brazil using historical facts and graphical illustrations. *Acta Didactica Napocensia*, 13(1), 87–104.

Artigue, M. (2014). *Perspectives on design research: The case of didactical engineering*. In:____. Approaches to qualitative research in mathematics education. New York: Springer, 467–496.

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Researches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281–308.

Artigue, M.; Perrin-Glorian, M. J. (1991). Didactic engineering, research and development tool: some theoretical problems linked to this duality. *For the Learning of Mathematics*, 11(1), 13–18.

Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. In:___. *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques*. [S. l.]: Grenoble: IMAG, 159–162.

Benito, R. N.; Silva, M. J. F. Da; Bosh, M. (2022). Um Percurso de Estudo e Pesquisa para o Ensino de Cônicas no Ensino Médio: condições e restrições que incidem sobre sua implementação. *Bolema*, 36(72), 515-533.

Benjamin, A. T.; Quinn, J. J. (2003*). Proofs the Realy Count: The art of Cominatorial Proof*. [S.l.]: American Mathematical Society.

Brousseau, G. (2008*). Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino*. [S. l.]: São Paulo: Ática.

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des Mathématiques, 1970–1990.* New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic, 19.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherchesen Didactiquedes Mathématiques*, 7(2), 33–115.

Chevallard, Y. (2002). *Organiser l'étude*. In:___. Actes de la Xème Ecole d'été de didactique des mathématiques. Grenoble: Grupo Editorial Iberoamérica, 3–22.

Costa, D. E.; Gonçalves, T. O. (2022). Compreensões, Abordagens, Conceitos e Definições de Sequência Didática na área de Educação Matemática. *Bolema*, 36(72), 358-388.

Gispert, H. (2014). *Mathematics education in france*, 1900–1980. In:___. Handbook on the history of mathematics education. New York: Springer, 229–240.

Grimaldi, R. P. (2012). *Fibonacci and Catalan numbers.* [S. l.]: New York: Wiley and Sons.

Gullberg, J. (1997). *Mathematics: from the birth of numbers*. [S. l.]: New York: Norton.

Koshy, T. (2011). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. [S. l.]: New York: Wiley-Interscience, 1.

Laborde, C. (1997). Affronter la complexité des situations didátiques d'apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. *Didaskalia*, (1), 97–112.

Oliveira, R. R. de. (2018). *Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações Recorrentes N-dimensionais e Representações Polinomiais e Matriciais*. 2018. 94 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará.

Padovan, R. (1994). *Dom Hans van der Laan: modern primitive*. [S. l.]: Amsterdam, Architecture and Natura Press, 1.

Pais, L. C. (2001). *Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa*. [S. l.]: Belo Horizonte: Autêntica.

Singh, P. (1985). The so-called fibonacci numbers in ancient and medieval india. *Historia Mathematica*, 12(1), 229–244.

Spreafico, E. V. P. (2014). *Novas identidades envolvendo os números de Fibonacci, Lucas e Jacobsthal via ladrilhamentos*. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas - IME.

Spivey, Z. M. (2019). *The Art of Proving Binomial Identities*. [S. l.]: London: Taylor and Francis Ltd.

Tedford, S. J. (2019). Combinatorial identities for the padovan numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 57, 291–298.

Vieira, R. P. M. (2020). *Engenharia Didática (ED): o caso da Generalização e Complexificação da Sequência de Padovan ou Cordonnier*. 2020. 266 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará.

Vieira, R. P. M.; Alves, F. R. V.; Catarino, P. M. M. C. (2022). Combinatorial interpretation of numbers in the generalized padovan sequence and some of its extensions. *Axioms*, 11(11), 1–9.

Vieira, R. P. M.; Alves, F. R. V.; Catarino, P. M. M. C. (2019). Uma exploração da sequência de padovan num curso de licenciatura em matemática. *Indagatio Didactica*, 11(4), 261–279.

Yilmaz, N. (2015). *Padovan ve perrin sayilarinin matris temsilleri*. (Doctorat thesis). 2015. 117 f. Tese (Doutorado) – Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Yilmaz, N.; Taskara, N. (2013). Matrix sequences in terms of padovan and perrin numbers. *Journal of Applied Mathematics*, 2013, 1–7.