REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Comprensión del concepto de transformación de funciones trigonométricas en estudiantes universitarios

Farabello S.P.[1], Trigueros M.[2]

sergio.farabello@uner.edu.ar, mtriguerosg@gmail.com

[1]Facultad de Bromatología, Universidad Nacional de Entre Ríos. Perón 1154, Gualeguaychú, Argentina.
[2]Departamento de Matemáticas, Instituto Tecnológico Autónomo de México, Río Hondo 1, Tizapán San Ángel, México DF, México.

Resumen

Las funciones matemáticas se relacionan con las Ciencias Experimentales y, particularmente las funciones trigonométricas y sus transformaciones se encuentran presentes a lo largo de toda la currícula de Física. El objetivo de este trabajo es investigar cómo los estudiantes universitarios comprenden el concepto de transformación de funciones trigonométricas en el marco de la Teoría APOE. Se propone una *descomposición genética inicial* en base a la cual se diseña la instrucción. El análisis de las producciones de los estudiantes permitió verificar empíricamente la descomposición genética inicial, constituyendo entonces un modelo útil de cognición que puede ser mejorado en futuras investigaciones.

Palabras clave: Transformación de funciones; Funciones trigonométricas; Descomposición genética

Understanding the concept of transformation of trigonometric functions into university students

Abstract

Mathematical functions are related to experimental sciences and, particularly trigonometric functions and their transformations are present throughout the entire Physics curriculum. The objective of this work is to investigate how university students understand the concept of transformation of trigonometric functions within the framework of APOS Theory. An initial genetic decomposition is proposed based on which instruction is designed. The analysis of students' productions allowed to empirically verify the initial genetic decomposition, then constituting a useful model of cognition that can be improved in future research.

Keywords: Transformation of functions; Trigonometric functions; Genetic decomposition

Compréhension le concept de transformation des fonctions trigonométriques en étudiants universitaires

Résumé

Les fonctions mathématiques sont liées aux sciences expérimentales et, en particulier les fonctions trigonométriques et leurs transformations sont présentes tout au long du développement curriculaire de Physique. L'objectif de ce travail est d'étudier comment les étudiants universitaires comprennent le concept de transformation des fonctions trigonométriques dans le cadre de la Théorie APOS. Une décomposition génétique initiale est proposée en fonction de la conception de l'instruction. L'analyse des productions des étudiants a permis de vérifier empiriquement la décomposition génétique initiale, alors constituant un modèle de cognition utile qui peut être amélioré dans les recherches futures.

Mots clés: Transformation des fonctions ; Fonctions trigonométriques ; Décomposition génétique

Compreensão o conceito de transformação de funções trigonométricas em estudantes universitários

Resumo

As funções matemáticas estão relacionadas a ciências experimentais e, particularmente, funções trigonométricas e suas transformações estão presentes em todo o currículo da Física. O objetivo deste trabalho é investigar como os estudantes universitários entendem o conceito de transformação de funções trigonométricas dentro da estrutura da Teoria APOS. Uma decomposição genética inicial é proposta com base na qual a instrução foi projetada. A análise das produções dos alunos permitiu verificar empiricamente a decomposição genética inicial e, em seguida, constituir um modelo útil de cognição que pode ser melhorado em pesquisas futuras.

Palavras chave: Transformação de funções; Funções trigonométricas; Decomposição genética

1. INTRODUCCIÓN

El conocimiento matemático constituye una herramienta básica para la comprensión y el manejo de la realidad en la que vivimos. Se encuentra presente en la vida cotidiana de los estudiantes, lo que posibilita que ellos puedan construir su saber matemático (Cadenas, 2007).

Para el estudio PISA el grado de competencia de los estudiantes no focaliza en los contenidos matemáticos en sí, sino en el grado de alfabetización matemática que ellos poseen, esto es, la capacidad para utilizar sus competencias matemáticas con el propósito de afrontar los desafíos de las cuestiones cotidianas.

Los países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) establecieron los principios básicos para comparar el rendimiento en matemáticas entre los países participantes, definiendo a la competencia matemática como (OCDE, 2004):

> *"La capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de estos individuos como ciudadanos constructivos, responsables y reflexivos"(p. 37).*

Los resultados obtenidos en un estudio realizado por Cadenas (2007) con estudiantes de primer año de Matemática y Ciencias Físico-Naturales muestran las carencias, dificultades y errores que tienen los estudiantes en cuestiones matemáticas muy elementales como, por ejemplo, ignorar la fórmula que permite hallar las soluciones de una ecuación cuadrática, y evidencian que, en general, no manejan los conocimientos básicos, elementales y estrategias generales para resolver ejercicios.

La investigación permitió confirmar, además, que los estudiantes tienen un porcentaje elevado de aprendizajes aparentes, sin contenido significativo. Los errores cometidos por los estudiantes que participaron de la investigación fueron el producto o la manifestación del "arrastre" de esos mismos errores en los conocimientos matemáticos que tenían antes de ingresar a la universidad.

Cadenas informa también que el tipo de error más común cometido por los estudiantes se debió al aprendizaje deficiente de los conocimientos previos y a las asociaciones incorrectas entre elementos singulares.

Finalmente, concluye diciendo que las dificultades y los errores conducen a concepciones incorrectas de la matemática y que los conocimientos matemáticos están influenciados por las dificultades que presentan los alumnos.

Para Moreno (2005) la enseñanza de los principios del cálculo resulta generalmente problemática y, aunque los profesores sean lo suficientemente capaces como para enseñar a los estudiantes a resolver de manera más o menos mecánica los problemas estándar, esas acciones quedan demasiado lejos de lo que significaría una verdadera comprensión de los conceptos y del pensamiento matemático.

Como consecuencia del empleo de esa forma de enseñanza, se han detectado dificultades en los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones problemáticas contextualizadas que requieren un mayor bagaje de conocimiento conceptual. Es decir, los estudiantes aprenden el "producto del pensamiento matemático" en lugar del "proceso".

Esto ocurre porque en un curso común de cálculo se llega, a lo sumo, a resolver los denominados "problemas de aplicación" propuestos en los libros de texto, los que generalmente no responden a la realidad (Camarena, 2007). Además, según lo reportado por Moreno (2005) algunos profesores de Matemática reconocen deficiencias en su formación inicial alejada de los fenómenos físicos, químicos y biológicos, lo que los lleva a dar explicaciones convincentes de algo que no dominan ni conocen profundamente.

La Modelación Matemática se presenta como una herramienta interesante para el tratamiento de fenómenos físicos, químicos y biológicos integrando lasCiencias Experimentales con la Matemática. Trigueros (2009) realizó una reflexión histórica sobre los modelos matemáticos y una revisión de lo que se entiende por Modelación Matemática, para luego describir un trabajo realizado por un grupo de investigadores del Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM) empleando como marco teórico la Teoría APOE.

Destaca además que el empleo de la modelación no debe empañar el propósito real por el cual fue implementada en el curso —que es la introducción de ciertos conocimientos matemáticos— y hacer perder la atención de los estudiantes en los aspectos conceptuales importantes de la disciplina. Por ello, los modelos deben ser usados como instrumento para favorecer el desarrollo de esos conceptos, aunque las técnicas de modelación no resulten las más adecuadas o las más eficaces en cada situación.

Las funciones matemáticas, particularmente las funciones trigonométricas se encuentran presentes a lo largo de toda la currícula de Física. A modo de ejemplo, y sin pretender ser exhaustivos, podemos mencionar el movimiento armónico simple, las oscilaciones amortiguadas, las ondas mecánicas, las ondas sonoras yel electromagnetismo.

El objetivo de este trabajo es investigar cómo los estudiantes universitarios construyen el concepto de transformación de las funciones trigonométricas.

2. ESTADO DEL ARTE

Gil Suárez (2014) diseñó e implementó una estrategia didáctica basada en la rueda o "vuelta al mundo" de Chicago (USA) para la enseñanza de las funciones trigonométricas en estudiantes de nivel medio, con el objetivo de potenciar su enseñanza. Los estudiantes armaron el modelo físico a escala de la rueda y realizaron la modelación matemática con las funciones seno y coseno generalizadas, utilizando las TIC para analizar los gráficos y los resultados. Se realizó una profundización del tema estudiando las ondas sonoras producidas al golpear un diapasón, los cambios de temperatura y la población de especies depredadoras. El autor comparó los resultados obtenidos en el proceso de enseñanza-aprendizaje con los estudiantes de un grupo control que no trabajó la modelación, encontrando un aumento en el desempeño de los estudiantes del primer grupo.

Hinojos et al. (2015) propusieron una actividad introductoria a través del uso de un péndulo como modelo físico para poder estudiar la transición entre las razones y las funciones trigonométricas $f(x) = A\,\mathrm{sen}(Bx + C) + D$o $f(x) = A\cos(Bx + C) + D$ involucradas en el movimiento armónico simple. Los estudiantes trabajaron inicialmente con lápiz y papel e hicieron uso del GeoGebra para visualizar los efectos de la variación de la amplitud, dejando abierto el camino para futuros trabajos que permitan estudiar todos los parámetros en la gráfica de las funciones transformadas.

Trigueros (2006) realizó una investigación con estudiantes universitarios de segundo año de ingeniería con el objetivo de investigar qué aspectos de la evolución conceptual de los estudiantes —en términos matemáticos— se ponen de manifiesto al desarrollar un proyecto en el que es necesario modelar una situación física tal como el movimiento de un péndulo. La autora encontró que los alumnos universitarios manifiestan muchas de las ideas previas correspondientes a estudiantes novatos, reportadas por otros autores; también expresa que los estudiantes tuvieron dificultades para "*utilizar argumentos conceptuales como el tipo de movimiento o la ecuación que lo gobierna para clasificar al movimiento y para utilizar los resultados que conocen en casos específicos*" (p. 1233), particularmente el caso del movimiento con fricción. Trigueros manifiesta que haber desarrollado un proyecto de Física dentro de una clase de Matemáticas permitió "poner de manifiesto de manera clara la compartimentación del conocimiento de los estudiantes", quienes entendían que la Física y la Matemática son ajenas entre sí.

Tacuri y Coaquira (2019) investigaron sobre el uso del software GeoGebra para el diseño de actividades de aprendizaje que permitieran a los estudiantes comprender los conceptos de amplitud, fase y frecuencia relacionados con las funciones trigonométricas. Los autores reportan que el uso de GeoGebra permitió que los estudiantes mejoraran la representación gráfica de las funciones seno y coseno, y hallaran con facilidad el período y la amplitud de dichas funciones y sus transformaciones.

Farabello y Trigueros (2020) realizaron una investigación con estudiantes universitarios de un curso de Física I con el fin de indagar acerca de los conocimientos matemáticos que ellos tenían acerca de la transformación de funciones, tras haber cursado Cálculo Diferencial. Trabajaron con las funciones básicas $f(x) = x^2$ y $f(x) = \mathrm{sen}\,x$, a las que los estudiantes debían aplicar la transformación general $T(x) = Af(Bx + C) + D$. El marco teórico de la investigación fue la Teoría de la Representaciones Semióticas de Duval.

Los autores pudieron determinar que los estudiantes tuvieron mayor dificultad con las transformaciones que involucraban los parámetros B y C, esto es, con las funciones $T(x) = f(Bx)$ y $T(x) = f(x + C)$. Explicaron estas dificultades argumentando que los parámetros A y D afectan directamente la imagen de la función (multiplican o dividen, y suman o restan a la función original), mientras que los parámetros B y C afectan a la variable independiente, es decir, producen una modificación "adentro" de la función.

Farabello y Trigueros (2020) concluyen su trabajo expresando que, debido a la importancia de la transformación de funciones cuadráticas y senoidales en Física, "*es necesario generar líneas de investigación que indaguen en profundidad las dificultades reportadas para poder caracterizarlas y diseñar estrategias didácticas adecuadas para tratar de disminuirlas*" (p. 42).

Con la finalidad de encontrar la forma de superar las dificultades que tienen los estudiantes de pregrado con la comprensión de las transformaciones de las funciones trigonométricas, en particular las traslaciones horizontales, Bornstein (2020) realizó un estudio en el que implementó el uso del software interactivo *TrigReps*, con el objetivo de indagar si el uso de *TrigReps*podía contribuir a aclarar las concepciones y conceptos erróneos de los estudiantes. El investigador reportó que los estudiantes dieron muestras de entender los efectos de las transformaciones multiplicativas y las transformaciones aditivas, así como también los efectos de las transformaciones dentro y fuera de los paréntesis, pudiendo señalar además que,para los estudiantes, las transformaciones horizontales aditivas se comportan contra intuitivamente.

Padilla y Acevedo (2021) investigaron sobre la caracterizacióndel conocimiento especializado del profesor de Matemáticas que enseña la reflexión de la función trigonométrica seno mediado por las TIC. Encontraron que el uso de GeoGebra facilita la representación de la función $f(x) = -\,\mathrm{sen}\,x$y, a partir de la gráfica se puede analizar visualmente el comportamiento de la función en cuanto a su dominio, rango y período. Advierten además que para poder efectuar la comparación entre las funciones $f(x) = \mathrm{sen}\,x$ y $f(x) = -\,\mathrm{sen}\,x$ resulta clave que elprofesor conozca del dominio, rango y período de la función original. Comprobaron, además, que es necesario que el profesor de Matemáticas conozca con profundidad los fundamentos teóricos de los contenidos que enseña, para plasmarlos de manera efectiva utilizando GeoGebra y hallaron relaciones entre el conocimiento matemático y didáctico-pedagógico, que cobran importancia en búsqueda del conocimiento especializado en la enseñanza de las matemáticas.

Vergara (2021) desarrolló una propuesta didáctica con el objetivo de favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje en la representación gráfica de funciones trigonométricas a través del software GeoGebra. Trabajó los conceptos de periodicidad en las funciones seno, coseno y tangente, para luego estudiar las asíntotas verticales de las funciones tangente, secante y cosecante. El autor indica que la implementación de la propuesta ayudará a los estudiantes a abstraer propiedades de forma geométrica y analítica vinculando, de forma intuitiva, los registros dinámicos de representación gráfica y algebraica con la teoría que los sustenta y posibilita la caracterización de las definiciones de los distintos comportamientos en cada tipo de función trigonométrica.

Agudelo (2021) realizó una intervención en estudiantes de nivel medio con el propósito de enseñar la transformación de gráficas de las funciones seno y coseno por medio del software GeoGebra. Concluyó que es viable la utilización deGeoGebra en el aprendizaje de las funciones trigonométricas y que puede ser aplicado en cualquier otro contexto educativo dentro de la rama de la Matemática teniendo en cuenta las delimitaciones del objeto de estudio. Destacó que los resultados positivos que obtuvo al realizar la intervención se consolidaron como significativos en cada uno de los estudiantes que participaron del proyecto.

Molano (2022) realizó un trabajo con el objetivo de investigar en qué medida la incorporación de una estrategia pedagógica soportada en *EXeLearning* en el aula, permite fortalecer la comprensión de las funciones trigonométricas y sus diferentes representaciones. En sus conclusiones expresa que el uso de GeoGebra permitió a los estudiantes identificar inicialmente las características que describen las funciones trigonométricas elementales y sus transformaciones. Además, la exploración de la herramienta de simulación online *FooPlot* permitió a los estudiantes verificar las gráficas de funciones trigonométricas a partir de las ecuaciones que las describen y pudieron visualizar cuatro tipos de gráficas diferentes superpuestas una sobre otra verificando similitudes y diferencias en términos de amplitud y frecuencia.

Bekene y Machaba (2022) realizaron un estudio en estudiantes de nivel medio de Etiopía con el objetivo de investigar el efecto del uso de GeoGebra en la comprensión de las funciones trigonométricas. A partir de los hallazgos del estudio propusieron realizar recomendaciones a la universidad para la implementación del programa STEM en el curso de verano 2022/23. Los autores encontraron diferencias significativas entre los dos grupos experimentales en los que se implementó el uso de GeoGebra y el grupo de control, principalmente en las transformaciones de las funciones trigonométricas. Concluyeron que el uso de GeoGebra mejora efectivamente la capacidad de los estudiantes para hacer asociaciones entre diferentes representaciones y contextos de funciones trigonométricas.

3. MARCO TEÓRICO

Se adopta como marco teórico la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) desarrollada por Dubinsky y un grupo de colaboradores del Research in UndergraduateMathematicsEducationCommunity (RUMEC).

Dubinsky y Lewin (1986) proponen la "abstracción reflexiva" de Piaget como base teórica para el análisis de la comprensión de los conceptos matemáticos y plantean que el origen de la teoría APOE se encuentra en la reformulación de la teoría Piagetiana de la Abstracción Reflexiva para ser aplicada al Pensamiento Matemático Avanzado (PMA).

En la teoría APOE se define un ciclo de investigación que consta de tres componentes: 1) análisis teórico; 2) diseño e implementación de la enseñanza, y 3) observación, análisis y verificación de datos (Figura 1).

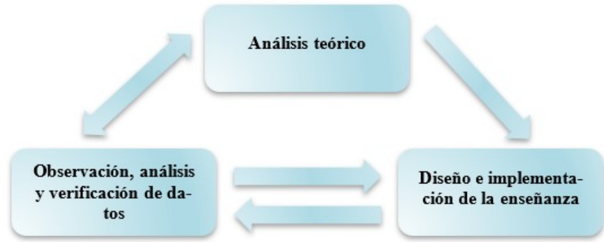

Figura 1. Ciclo de investigación de la Teoría APOE
Nota. Adaptado de Arnon et al. (2014)

3.1. Análisis teórico

El análisis teórico tiene como finalidad proponer un modelo que pueda describir las construcciones mentales específicas del alumno, al momento de desarrollar la comprensión del concepto que está estudiando. El resultado de este análisis es lo que se denomina *descomposición genética* (DG) del concepto. La DG consiste en una descripción detallada de las construcciones mentales que el individuo debería realizar para poder enfrentarse satisfactoriamente a un concepto matemático en particular.

La Teoría APOE reconoce que la DG de un concepto no es única, ya que distintos estudiantes pueden seguir caminos diferentes de los descriptos en una DG particular. Por lo tanto, el valor de una DG reside en su uso como un modelo general que describe aquellas construcciones que se encuentran necesarias para que la mayoría de los estudiantes puedan aprender un concepto. Como con cualquier modelo teórico general y descriptivo, varias DG pueden ser diseñadas por diferentes investigadores o incluso por un mismo grupo de investigadores para describir el aprendizaje de un concepto particular. Si esas descomposiciones genéticas están respaldadas por estudios empíricos de las construcciones de los estudiantes, podrían considerarse descripciones razonables de las construcciones de los estudiantes.

La *descomposición genética inicial* (DGI) es el análisis teórico realizado a priori por el investigador y constituye la base a partir de la cual se llevará a cabo el diseño e implementación de la instrucción, así como el análisis de resultados.

La DGI irá evolucionando con cada iteración del ciclo definido en la Figura 1, proceso que se conoce como refinamiento de la DG. Este refinamiento permitirá comprender cada vez más cómo los alumnos construyen el concepto matemático que se está analizando y conformará una nueva base para la propia investigación o para investigaciones futuras.

Para construir un concepto matemático, el individuo comienza ejerciendo *Acciones* sobre objetos previamente construidos. Las Acciones responden a estímulos externos y son realizadas paso a paso por el individuo –mirar o recordar una fórmula o tabla; utilizar un algoritmo determinado–.

Cuando el estudiante repite una Acción y reflexiona sobre ella, aunque sin la necesidad de ejecutarla explícitamente, puede interiorizarla en un *Proceso* (Figura 2). Este se caracteriza porque el estudiante no requiere de estímulos externos para realizar la operación e incluso puede saltar pasos o anticipar el resultado de su aplicación (Dubinsky, 1996, Arnon et al. 2014).

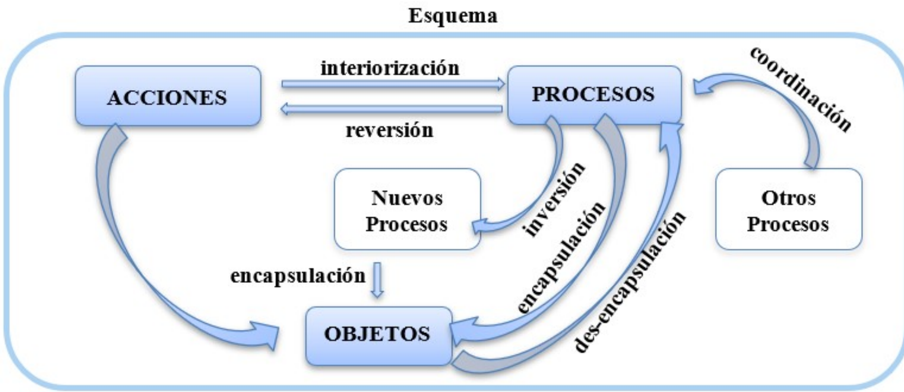

Figura 2. Estructura y mecanismos mentales para la construcción de un concepto matemático

La Teoría APOE define otros dos mecanismos por medio de los cuales se puede generar un Proceso: la *coordinación* y la *reversión o inversión*. El mecanismo de coordinación tiene lugar cuando un Proceso construido se relaciona con otro Proceso para determinar un nuevo Proceso. El mecanismo de reversión permite a un individuo revertir un Proceso existente dando origen a un nuevo Proceso.

Cuando un individuo logra reflexionar sobre las operaciones aplicadas a un Proceso en particular, toma consciencia del proceso como un todo, realiza transformaciones sobre él —ya sean Acciones o Procesos— y puede construir esas transformaciones, entonces el proceso ha sido encapsulado por el individuo en un *Objeto*.

Una vez que un individuo ha logrado construir un Objeto, puede ser capaz de regresar sobre los Procesos que lo generaron a través del mecanismo de desencapsulación. De esta manera, podrá ir y venir entre el Objeto y el Proceso cada vez que sea necesario.

Los *Esquemas* se definen como una colección coherente de Acciones, Procesos y Objetos —a la que pueden sumarse también otros Esquemas y las relaciones existentes entre ellos— asociados a un concepto particular (Asiala et al., 1997). Los Esquemas que forman la estructura matemática de un individuo no están acabados, son estructuras dinámicas que evolucionan constantemente cada vez que nuevas relaciones se construyen entre sus componentes. Un Esquema puede ser tematizado en un nuevo Objeto sobre el cual pueden hacerse nuevas Acciones.

En los estudios llevados a cabo con la teoría APOE se caracteriza el nivel de conocimiento que demuestran los estudiantes en términos de concepciones, no para clasificarlos, sino para determinar aquellas construcciones que son necesarias para apoyar su desarrollo del conocimiento. Cuando un estudiante responde a distintas situaciones problemáticas utilizando mayoritariamente Acciones da evidencia de haber construido una concepción o nivel Acción. Asimismo, las concepciones Proceso u Objeto se caracterizan por el hecho de que el estudiante muestre mayoritariamente la construcción de dichas estructuras en sus respuestas a diversos problemas relacionados con el concepto en cuestión.

3.2. Diseño e implementación de la enseñanza

La Teoría APOE establece como modelo didáctico el *ciclo de enseñanza ACE*, estrategia pedagógica que consta de tres componentes: (A) actividades; (C) discusión en el aula; y (E) ejercicios (Figura 3).

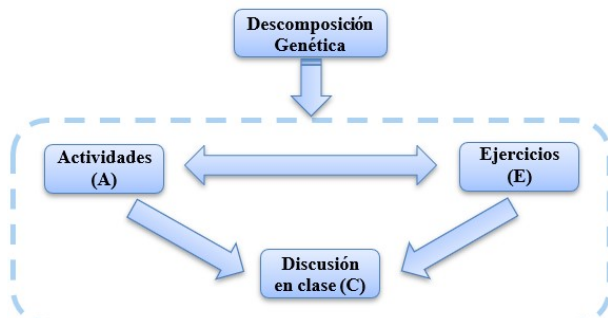

Figura 3. Relación entre el ciclo de enseñanza ACE y la DG

En la primera parte del ciclo, las *Actividades*, los estudiantes trabajan de manera colaborativa en grupos resolviendo tareas diseñadas con el fin de reflexionar sobre sus construcciones previas y promover las construcciones mentales sugeridas en la DG.

En la *Discusión en clase*los estudiantes desarrollan las tareas propuestas, reflexionan sobre su trabajo y el profesor subraya las ideas importantes o introduce preguntas para promover el surgimiento de ideas que aún no aparecieron.

En la última etapa del ciclo, los *Ejercicios de tarea*, los estudiantes se enfrentan a situaciones problemáticas diseñadas con el fin de reforzar la reflexión realizada en las dos etapas previas.

En la Figura 3 también se puede apreciar la relación existente entre la DG y el ciclo de enseñanza ACE. Se puede observar que la DG afecta a todos y cada uno de los componentes del ciclo ACE.

3.3. Observación, análisis y verificación de datos

Para recolectar los datos se pueden utilizar los siguientes instrumentos:

- Preguntas y respuestas escritas, en forma de cuestionarios, con preguntas cerradas o abiertas.
- Entrevistas semiestructuradas realizadas a los estudiantes posteriormente a la finalización del ciclo ACE, con la intención de profundizar lo más posible la búsqueda de las construcciones mentales.

Recepción:26/03/2022 *Aceptación: 22/05/2022*

- Una combinación de instrumentos escritos y entrevistas.

Una vez finalizado el análisis de los instrumentos y la transcripción y análisis de las entrevistas, el investigador procede a contabilizar y clasificar las construcciones mentales del concepto matemático estudiado, tomando como base el análisis teórico plasmado en la DG. Esto permite analizar críticamente la DGI y plantear una nueva etapa de investigación, comenzando por el refinamiento de la DG y desarrollando un nuevo ciclo de enseñanza ACE, tras el cual se volverán a recolectar, analizar y verificar los datos con el objetivo de acercarnos cada vez más a poder describir la forma en que un estudiante comprende el concepto matemático.
El ciclo puede repetirse tantas veces como el investigador lo considere necesario e, incluso, los resultados obtenidos pueden ser tomados por otros investigadores en pos de continuar el proceso de investigación.

4. METOLOGÍA

De acuerdo con el marco teórico adoptado y el ciclo de investigación definido por la Teoría APOE (Figura 1), el primer paso para realizar el estudio sobre la comprensión del concepto de transformación de funciones es la realización del análisis teórico que culmina con la creación de la DGI.
Luego, corresponde pasar a la segunda etapa del ciclo de investigación, que es el diseño e implementación de la instrucción. En base a la DGI se diseñan las actividades y ejercicios para proceder luego a implementar el ciclo de enseñanza ACE en sus tres etapas: (A) actividades; (C) discusión en el aula; y (E) ejercicios. El ciclo ACE se realiza en cada clase o encuentro e, incluso, en una misma clase puede repetirse más de una vez
Una vez completado el tema que se quiere enseñar, se procede a la observación, análisis y verificación de datos para poder contabilizar y clasificar las construcciones mentales del concepto matemático estudiado, analizar y en su caso refinar la DGI.

4.1. Análisis teórico: descomposición genética inicial del concepto de transformación de funciones

4.1.1. Conocimientos previos

Para construir una descomposición genética del concepto de transformación de funciones, es necesario partir de la base de que los alumnos han construido, en cursos previos, los conceptos de “variable” y de “función” a nivel Objeto y también los conceptos de “ceros”, “intervalos de positividad y negatividad”y “continuidad” de una función a nivel Proceso.

Variable como Objeto
De acuerdo con el Modelo 3UV (3 Usos de la Variable) (Trigueros y Ursini, 2003; Ursini et al., 2005) un estudiante que comprende a la variable como un objeto matemático es aquél que es capaz de reconocer en un problema el papel que juega la variable (incógnita, número general o variable en relación funcional), reconocer los cambios que se dan en su papel a lo largo de la solución del problema y operar con ella de forma correcta. Sin esta construcción es imposible construir una noción de función como un Objeto.

Función como Objeto
Según Farabello y Trigueros (en prensa), cuando el estudiante reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un Proceso en particular y toma consciencia del proceso como un todo, se produce la encapsulación del Proceso en un Objeto, lo cual le permite al estudiante realizar nuevas Acciones sobre él.
El estudiante puede dar cuenta de la encapsulación de Procesos en el Objeto función e incluso en la desencapsulación del Objeto función en los Procesos que le dieron origen, cuando realiza la manipulación de funciones o analiza sus propiedades.
Dada una función, un individuo puede encapsular Procesos dando lugar a la creación de Objetos los cuales pueden ponerse en evidencia cuando los estudiantes hacen Acciones sobre ellos.

4.1.2. Modelo general de la descomposición genética

Los estudiantes transforman los objetos “variable” y “función” mediante ***Acciones*** en las que se realiza una operación algebraica o gráfica sobre la variable independiente, o sobre la variable dependiente. Interpretan también qué consecuencias, si las hay, tiene cada una de estas operaciones sobre el dominio y el rango de la función de manera geométrica.
Cuando esas Acciones se repiten y el alumno reflexiona sobre ellas, puede *interiorizarlas* en los ***Procesos*** correspondientes al realizar las mismas operaciones algebraicas o gráficas sobre la variable o sobre la función para obtener una función transformada. El alumno puede realizarlas de manera general e incluso imaginar el resultado de la transformación de manera algebraica o gráfica sin necesidad de hacer los cálculos. El alumno puede, además, determinar de manera general el dominio y el rango de la función transformada en cada caso tanto algebraica como gráficamente.
Estos Procesos se *coordinan* con los Procesos mencionados como “conocimientos previos”. De cada una de estas coordinaciones resulta un nuevo Proceso en el que es posible considerar transformaciones más complejas.
El alumno puede además coordinar los Procesos algebraicos y gráficos sobre transformaciones en nuevos Procesos de tratamiento o conversión de una representación a otra, reconociendo las distintas representaciones como representaciones de la misma transformación de una función específica, para distintas funciones.
Cuando el estudiante reflexiona sobre las Acciones aplicadas sobre los Procesos específicos mencionados anteriormente, los coordina y puede considerar a la transformación de funciones como un todo, adquiere una conciencia de su totalidad y puede, además, hacer nuevas Acciones, o percibe qué Acciones o Procesos pueden actuar sobre él —por ejemplo, considerar transformaciones que requieran la aplicación de sucesivas transformaciones simples—y es capaz realmente de construirlas, es posible considerar que ha *encapsulado* las funciones transformadas como ***Objeto***.
El estudiante puede además ejecutar Acciones o Procesos sobre ese Objeto y también lo puede *desencapsular* para

obtener los Procesos que le dieron origen. Mediante esta desencapsulación puede comparar distintas funciones transformadas, obtener o reconocer la función básica que dio origen al Objeto, o incluso reconocer propiedades globales de la familia de funciones implicada en la transformación, como así también reconocer el dominio, el rango, los ceros, los puntos de discontinuidad, etc.

4.2. Implementación de la enseñanza

En base a la DGI se diseñaron las tres etapas del ciclo de enseñanza ACE, que se implementó en el año 2020 a través de un taller virtual. Se invitó a participar libremente a los estudiantesque se encontraban cursando Matemática II y habían terminado exitosamente un curso de Cálculo Diferencial en el semestre anterior, cuyo contenido incluía el tema de transformación de funciones.
Los estudiantes tenían que realizar las actividades extraclase y subirlas luego al Aula Virtual del Taller en la plataforma Moodle, debiendo participar además de los foros que se abrieron para facilitar y coordinar las discusiones.
El número de estudiantes no se mantuvo constante y fue mermando a lo largo del Taller, de forma tal que de los 25 que comenzaron la actividad, 14 completaron todos los encuentros. Se descartaron 3estudiantes por no haber cumplimentado más del 30% de las actividades, quedando en total un conjunto de 11 instrumentos resueltos para ser sometidos al análisis.

4.3. Diseño del instrumento

El instrumento correspondiente a la tercera parte del ciclo de enseñanza ACE se diseñó en función de la DGI y consistió en un total de veinte preguntas que trataban sobre la transformación de funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas, trigonométricas y las aplicaciones de estas últimas a la ecuación sinusoidal de la onda.
Para este trabajo se consideran solo tres de las consignas (P12, P13 y P14), que corresponden a la transformación de las funciones trigonométricas.
Para responder dichas consignas se les suministraron seis gráficas, en cada una de las cuales aparecía la función básica $f(x) = \operatorname{sen} x$ en color rojo y la funcióntransformada $T(x)$ en color azul. (Figuras 4 a 9).

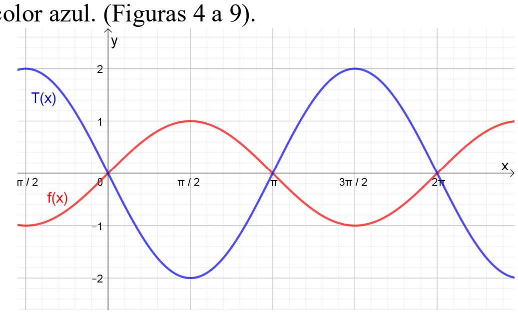

Figura 4. Gráfica G1 correspondiente a la consignaP12-14

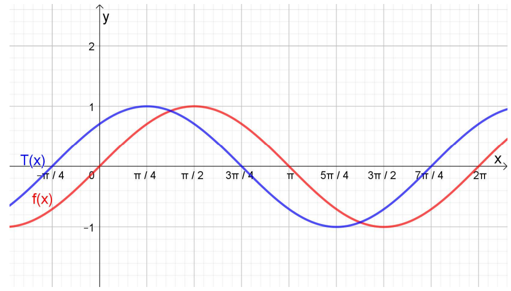

Figura 5. Gráfica G2 correspondiente a la consignaP12-14

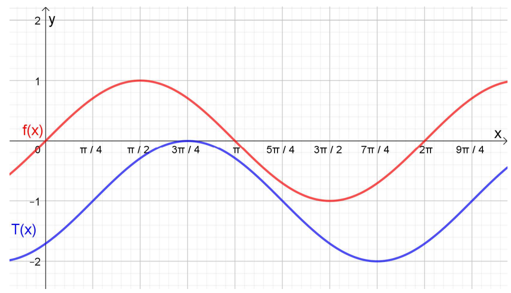

Figura 6. Gráfica G3 correspondiente a la consigna P12-14

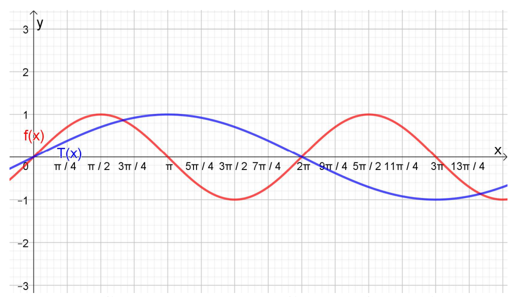

Figura 7. Gráfica G4 correspondiente a laconsigna P12-14

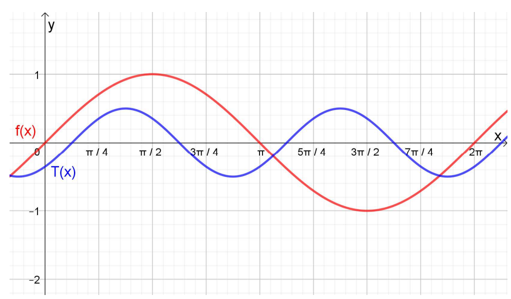

Figura 8. Gráfica G5 correspondiente a la consigna P12-14

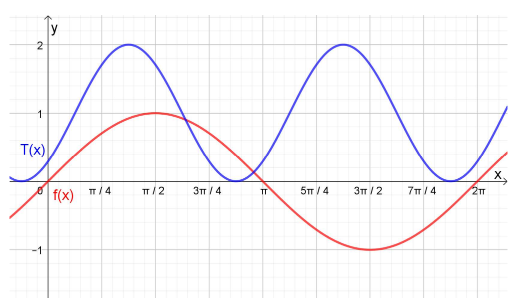

Figura 9. Gráfica G6 correspondiente a la consignaP12-14

Las consignasque se realizaron fueron las siguientes:

- Consigna P12
  a) Describir las transformaciones que se realizaron en cada caso. Tener en cuenta que en algunos

casos dos o más transformaciones diferentes pueden conducir al mismo resultado

b) Identificar los valores y signos de los parámetros que intervienen en cada transformación.

c) Escribir la expresión algebraica de la función transformada en cada caso.

- Consigna P13: describir todos los cambios que se produjeron en la función básica tras la aplicación de las transformaciones en cada caso (ceros, intervalos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, “crestas” y “valles”).
- Consigna P14: describir las variaciones de la amplitud y frecuencia de la onda sinusoidal en la función transformada.

4.3.1. Análisis previo del instrumento

De acuerdo con la DGI, se predijeron las construcciones mentales que podrían encontrarse en las preguntas referidas a funciones trigonométricas.

Construcciones Acción
La evidencia da cuenta de que los estudiantes reconocen la transformación en la gráfica, pero:

- sólo describen una de las transformaciones que, aplicadas a la función básica, dan el mismo resultado en G1.
- reconocen el parámetro que interviene, pero no su valor y su signo (G2 y G4).
- reconocen los parámetros que intervienen en la transformación, pero no todos, como así tampoco su valor y su signo (G3, G5 y G6).

Construcciones Proceso
La evidencia da cuenta de que los estudiantes reconocen la transformación de la gráfica y:

- describen todas las transformaciones que, aplicadas a la función básica, dan el mismo resultado en G1.
- reconocen el parámetro que interviene, pero identifican sólo su valor o su signo (G2 y G4).
- reconocen los parámetros que intervienen en la transformación, pero no todos, e identifican sólo su valor o su signo (G3, G5 y G6).

Construcciones Objeto
La evidencia da cuenta de que los estudiantes reconocen la transformación de la gráfica y:

- reconocen el parámetro que interviene, e identifican correctamente su valor y su signo (G2 y G4).
- reconocen los parámetros que intervienen en la transformación, pero no todos, e identifican correctamente su valor y su signo (G3, G5 y G6).
- escriben correctamente la expresión algebraica en cada caso.
- describen todos los cambios que se produjeron en la función básica tras la aplicación de las transformaciones en cada caso:ceros, intervalos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, crestas y valles.
- describen los cambios de amplitud y frecuencia de las funciones transformadas.

4.4. Entrevistas

Una vez finalizado el análisis de las producciones escritas de los estudiantes, y luego de clasificarlos según las construcciones mentales evidenciadas, se seleccionaron cuatro estudiantes que se encontraban en distintos niveles para ser entrevistados. De los estudiantes seleccionados, uno había evidenciado una construcción Acción;uno, una construcción Proceso; y los dos restantes una construcción Objeto.
Para cada estudiante se diseñó una entrevista diferente, con la intención de indagar sobre aquellas cuestiones que habían dejado alguna duda acerca de la construcción mental que el alumno había evidenciado al resolver las actividades planteadas en el instrumento.

5. DISCUSIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

5.1. Análisis general de los resultados

Las consignas P12, P13 y P14 fueron respondidas por diez de los once estudiantes que completaron la actividad final del Taller.
Para analizar las producciones de los estudiantes se tuvieron en cuenta las construcciones mentales previstas en la DGI que fueron evidenciadas en un mayor número por cada estudiante. Por ejemplo, si a un estudiante se le asigna una construcción Objeto, esto implica que es la construcción que más veces apareció en su respuesta, pero no implica que no haya evidenciado también construcciones Acción y Proceso.
A los estudiantes se los identificó correlativamente desde A01 hasta A11.De acuerdo con la DGI, se esperaba que los estudiantes evidenciaran construcciones mentales Acción, Proceso y Objeto. Dos estudiantes (A04 y A08) mostraron una construcción Acción, tres estudiantes (A07, A10 y A11) dieron muestra de una construcción Proceso y cuatro estudiantes (A01, A02, A03 y A09) evidenciaron una construcción Objeto. El estudiante A06 no evidenció ninguna de las construcciones mentales previstas en la DGI, mientras que el estudiante A05 no realizó la actividad.

Estudiantes que evidenciaron una construcción Objeto
Los estudiantes A01 y A03 respondieron en forma correcta las tres consignas para las seis transformaciones: reconocieron todos los parámetros que intervienen, indicando en forma correcta su valor y su signo; escribieron todas las expresiones algebraicas; describieron todos los cambios producidos por las transformaciones: rango, ceros, conjuntos de positividad y de negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, crestas y valles; y describieron todos los cambios de amplitud y de frecuencia.
El estudiante A01, al responder la consigna P13 sobre los cambios en las seis transformaciones omitió justificar por qué se producían. En la entrevista se le preguntó especialmente por estos puntos y respondió en forma satisfactoria.

(P) Claro, exactamente. Eso está bien. Y también era para preguntarte en la... bueno, pero en todas son otras posibilidades, esa está bien. Vamos a la 13. La 13, en la 6.d, en esta… La pregunta es... Vos tenías ahí, en ese caso, esos gráficos que corresponden a la función seno. La función roja que es la función seno y una transformación que se hizo sobre ella. Y vos pusiste en todas las transformaciones de la T1 la T6, eh... cambia el rango. ¿Está?
(A) ¿En todas puse?
(P) Pero no indicaste por qué. Sí, en todas pusiste cambia el rango… No, en todas no. En la 2 y en la 4 pusiste que no cambia el rango, pero en las otras pusiste que cambia el rango y cuando fue… o sea vos decías, se produce algo, o sea… perdón. Ahí hay una modificación… ¿acá cambia algo desde el punto de vista del rango?
(A) Sí, **acá por la amplitud**…
(P) Y cuando iba la justificación, vos simplemente pusiste cuál era el nuevo rango.
(A) Acá es por amplitud, porque aumenta la amplitud, y **acá es por desplazamiento**, digamos... En esta por ejemplo, es por desplazamiento…

El estudiante A03 agregó archivos que posibilitaron confirmar la construcción Objeto evidenciada en sus respuestas. En las Figuras 10 y 11 se pueden observar algunos de ellos.

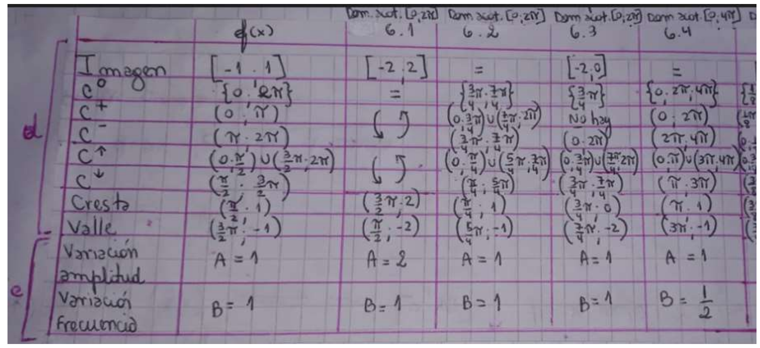

Figura 10. Análisis realizado por el estudiante A03 para responder las consignas P12, P13 y P14

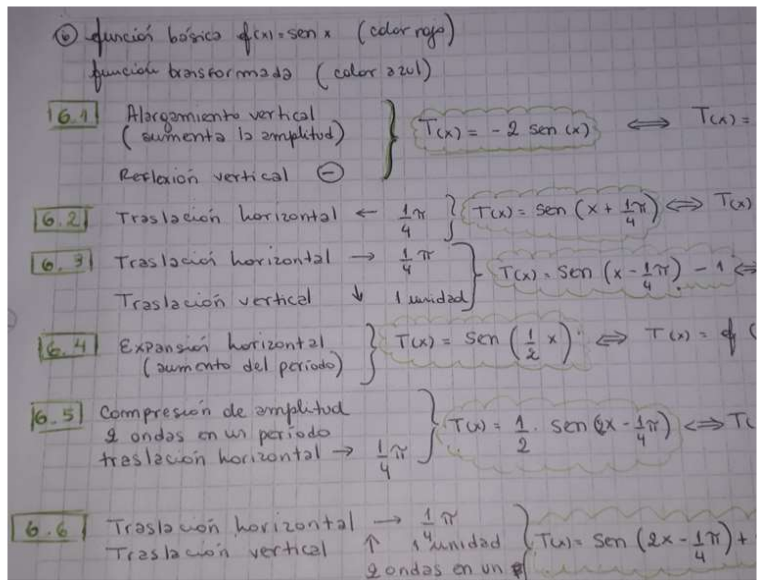

Figura 11. Análisis realizado por el estudiante A03 para responder las consignas P12, P13 y P14

Si bien es cierto que en la producción subida al Aula Virtual el estudiante A03 no pudo identificar correctamente el valor y signo de los parámetros que intervenían en todas las transformaciones posibles aplicadas a la función original para obtener las gráficas de las funciones transformadas mostradas en las Figuras 4 y 5, en la entrevista pudo salvar esta situación.

(P) Si, después ya tenemos la 12. Vamos a pasar a la 12. 12, G1. Entonces en la 12 tenés que identificar el valor y el signo de los parámetros.
(A) Y la básica era una función seno... con el color rojo, y la otra está en azul… puse alargamiento vertical y reflexión vertical.
(P) Pusiste menos dos seno de X. La pregunta es… ¿si puede haber otra transformación?
(A) Sí, yo la veo de esa forma, por eso... ¿Cuál otra puede ser…? Sobre el eje Y…
(P) Si yo te dijera: estoy de acuerdo con el dos como amplitud porque la aumenta, pero no quiero que le pongas un signo menos a la amplitud…
(A) ¿Y no ponerle al menos?

(A) ¿En otra parte? No, porque valor absoluto no le puedo poner tampoco… porque no sirve de nada… A ver… **se lo pongo a… ¿a la X adentro?**
(P) ¿Podrías ponérselo al ángulo de fase?
(A) Ahh, si la… sí. Porque la arrancás acá y coincidiría acá justito en este… en la panza que hace acá, la hace acá también…
(P) Entonces vos podrías hacer dos por el seno de… X...
(A) … **menos o más, depende de para qué lado me quiero ir**…

El estudiante A02 cometió algunos errores que se detallan a continuación:al describir la transformación realizada en la gráfica G6 (Figura 9) expresó que "*la función se traslada hacia la derecha, hacia arriba y a su vez, se expande verticalmente* (sic)";no advirtió que la amplitud no cambia y, por ende, no se produce una expansión vertical; esto se ratifica al analizar la respuesta a la consigna P14 sobre la

variación de la amplitud: “*la amplitudes mucho mayor, ya que hay un alargamiento vertical de la función* (sic)”.
Al responder la consigna P12, tampoco se dio cuenta que se produce una compresión horizontal, pero sí lo advirtió al describir la variación de la frecuencia: “*la frecuencia es más alta, hay un alargamiento horizontal de la función* (sic)”
El estudiante A09 respondió en forma correcta todas las consignas, a excepción de las relacionadas con la aplicación de la transformación indicada en la gráfica G3 (Figura 6). Sólo reconoció el desplazamiento vertical, omitiendo la traslación horizontal que se produce en forma simultánea. Esto se ve reflejado en la obtención de la expresión algebraica para dicha transformación (consignaP12), donde escribe $T(x) = \text{sen}(x) - 1$ en lugar de $T(x) = \text{sen}\left(x - {}^{\pi}/_{4}\right) - 1$; en la respuesta a la consigna P13 cuando indica que los ceros cambian como consecuencia de que “*la función se encuentra una unidad por debajo del eje x donde ésta tiene sus crestas en vez de donde tiene sus puntos de inflexión* (sic)”; y en la respuesta a la consignaP14 cuando expresa que la amplitud no varía porque “*aunque se haya trasladado verticalmente, la distancia entre la recta sobre la que se coloca la función y los valles y las crestas es la misma que la función original* (sic)”.

Estudiantes que evidenciaron una construcción Proceso
Los estudiantes A07, A10 y A11 reconocieron en forma correcta los parámetros que intervienen en las seis transformaciones indicadas y lograron escribir todas las expresiones algebraicas. Pero no pudieron describir o justificar en su totalidad los cambios producidos por las transformaciones.
Los estudiantes A07 y A11 describieron, pero no justificaron los cambios en: rango, ceros, conjuntos de positividad y de negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, crestas y valles (consignaP13). En cambio, en la pregunta P14 identificaron y justificaron correctamente los cambios en la amplitud y la frecuencia de las funciones transformadas. El estudiante A11 se equivocó al indicar el aumento o disminución de la frecuencia y los valores del período en las transformaciones T_4, T_5 y T_6 (Figura 12).

Variación de la frecuencia de la onda transformada respecto de la onda básica	T_1	No	La frecuencia de la onda transformada respecto de la onda básica no varía.
	T_2	No	La frecuencia de la onda transformada respecto de la onda básica no varía.
	T_3	No	La frecuencia de la onda transformada respecto de la onda básica no varía.
	T_4	Sí ✓	La frecuencia de la onda transformada respecto de la onda básica aumenta, el valor del período es de 0,5.
	T_5	Sí ✓	La frecuencia de la onda transformada respecto de la onda básica disminuye, el valor del período es de 2.
	T_6	Sí ✓	La frecuencia de la onda transformada respecto de la onda básica disminuye, el valor del período es de 2.

Figura 12. Respuesta del estudiante A11 sobre la variación de la frecuencia para las seis transformaciones indicadas de la función básica $\boldsymbol{f(x) = \text{sen}\, x}$. En color rojo, las observaciones realizadas por el profesor que corrigió la actividad.

El estudiante A10 reconoció, pero no justificó los cambios en: rango, ceros, conjuntos de positividad y de negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, crestas y valles, amplitud y frecuencia de las funciones transformadas (consignas P13 y P14).

Estudiantes que evidenciaron una construcción Acción
El estudiante A04 analizó solamente la transformación que da lugar a la gráfica G1 (Figura 4) y reconoció el alargamiento vertical, pero no indicó que también podía tratarse de una reflexión vertical.
El estudiante A08 analizó las seis transformaciones propuestas. En la transformación correspondiente a la gráfica G1 (Figura 4) reconoció el alargamiento vertical, pero no indicó que también podía tratarse de una reflexión vertical. En la transformación correspondiente a la gráfica G5 (Figura 8) se limitó a indicar una compresión, sin aclarar que ésta era horizontal y vertical, omitiendo además la traslación horizontal de la función. Por último, en la transformación correspondiente a la G6 (Figura 9) expresó que la función se había acortado, pero no indicó que ese acortamiento era horizontal; también indicó erróneamente que la amplitud había disminuido y que había sufrido un desplazamiento vertical hacia arriba, omitiendo la traslación horizontal de la función (Figura 13).

6.a)	Descripción de la transformación realizada	
6.1)	Su expansión es solo vertical, por lo tanto se modifica su amplitud + Reflexión vertical y se mantiene el período	✗
6.2)	La función se desplaza horizontalmente hacia la izquierda, pero se mantiene en su forma vertical.	✓
6.3)	La función se desplaza tanto vertical como horizontalmente. Vertical hacia abajo y horizontal hacia la derecha.	✓
6.4)	En este caso se produce un alargamiento o una expansión horizontal de la función transformada respecto de la función inicial. Su período cambia para duplicarse.	✓
6.5)	La función sufre un acortamiento/ compresión H y V. Su período y su amplitud disminuyen + trasl. horiz	✗
6.6)	La funcion transformada se acortó horiz., disminuyó su amplitud no y su período. Además se desplazó verticalmente hacia arriba. y horiz.	✗

Figura 13. Descripción realizada por el estudiante A08 sobre las seis transformaciones indicadas de la función básica $\boldsymbol{f(x) = \text{sen}\, x}$. En color rojo, las observaciones realizadas por el profesor que corrigió la actividad.

6. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Las construcciones mentales previstas en la DGI aparecieron mayoritariamente en las producciones realizadas por los estudiantes. Podría decirse entonces que la DGI ha sido verificada empíricamente, por lo que puede constituir un modelo útil de cognición, aunque factible de ser mejorado. Como afirmamos anteriormente en el marco teórico, la DG no es única y tampoco tiene limitaciones en cuanto a su evolución. Puede ser revisada con el fin de refinarla; rediseñar las actividades, discusiones de clase y ejercicios; y volver a aplicar el ciclo de enseñanza ACE con nuevos instrumentos, adecuados a la DG refinada, con el objetivo de obtener una descripción más precisa y detallada de las construcciones mentales que el estudiante puede evidenciar al enfrentarse al estudio de la transformación de funciones trigonométricas.

Los estudiantes pudieron ser clasificados en diferentes niveles de acuerdo con las construcciones mentales evidenciadas en la totalidad de las actividades. El 18% (n=2) de los estudiantes fue clasificado en un nivel Acción, el 27% (n=3) en un nivel Proceso y el 36% (n=4) en un nivel Objeto.

Esto no quiere decir que los estudiantes hayan evidenciado solo el nivel en que se los ha clasificado, sino que, de acuerdo con el marco teórico adoptado, dieron muestras de otras construcciones mentales, moviéndose entre Acción, Proceso y Objeto según la característica de la consigna que tenían que resolver.

Los estudiantes que mostraron una construcción Acción tuvieron dificultades para reconocer más de una transformación en la gráfica de la función transformada. Por ejemplo, en la gráfica que se muestra en la Figura 4, advirtieron la expansión vertical pero no el desplazamiento horizontal —o, en su caso, la reflexión vertical— que resulta evidente al mirar la gráfica de la función básica y su transformada. Tampoco lo reconocieron al momento de responder qué cambios se producían en los conjuntos de positividad y de negatividad o en los intervalos de crecimiento y decrecimiento, pues si bien es cierto que indicaron que se modificaban, no pudieron explicar correctamente por qué. Se puede pensar entonces que estos estudiantes no comprendieron que una función puede sufrir más de una transformación en forma simultánea, por lo que quizás sea conveniente introducir en los instrumentos del ciclo ACE actividades que permitan visualizar estos cambios simultáneos. También pueden introducirse actividades manuales (BorbayConfrey, 1996; FaulkenberryyFaulkemberry, 2010) que ayuden a superar las dificultades inherentes a la traslación horizontal, reportadas también por Farabello y Trigueros (2020).

Los estudiantes que mostraron un nivel Proceso pudieron reconocer todas las transformaciones simultáneas que se daban en cada caso, pero tuvieron dificultades para identificar correctamente el valor y el signo de los parámetros que intervenían en las transformacionesy no pudieron escribir en forma correcta la expresión de la función transformada. Para tratar de vencer estas dificultades halladas y posibilitar que los estudiantes encapsulen los Procesos en Objetos, podrían incorporarse actividades en el ciclo ACE mediadas por el uso de software dinámico, de forma tal que permita a los estudiantes analizar y comprender el significado del valor y del signo de los parámetros que intervienen en la función transformada (Bornstein, 2020; Agudelo, 2021; Molano, 2022; Bekene y Machaba, 2022).

En los estudiantes que mostraron un nivel Objeto, las entrevistas permitieron comprender que, a pesar de haber mostrado una concepción Proceso en la producción escrita, habían logrado encapsular el concepto transformación defunciones en un nivel Objeto. Cabe destacar aquí la importancia de las entrevistas como un elemento importante al momento de realizar el análisis de los datos.

La implementación del ciclo ACE en forma virtual como consecuencia del aislamiento social preventivo y obligatorio producto de la pandemia por el COVID-19 pudo haber incidido en los resultados obtenidos tanto en la verificación de la DGI como en la clasificación del nivel de comprensión de los estudiantes, dado que ni los docentes-investigadores ni los estudiantes estábamos habituados a trabajar en la modalidad virtual. Quizás la implementación de un nuevo ciclo de enseñanza ACE en la presencialidad pueda dar otros resultados, por lo que queda abierta la posibilidad de realizar futuras investigaciones.

Las entrevistas resultaron, además, un instrumento importante para terminar de caracterizar el nivel de comprensión del estudiante ya sea para confirmar o modificar lo que se había observado en la parte escrita. Por ello, coincidiendo con las investigaciones mencionadas en el marco teórico, resulta importante combinarlas entrevistas con las producciones en lápiz y papel para profundizar aún más el análisis y la contrastación de la DG.

La utilización del software dinámico GeoGebra permitió que los estudiantes verificaran sus producciones y pudieran utilizar los deslizadores para representar los parámetros y observar su incidencia en las funciones transformadas, coincidiendo con lo expresado por otros autores (Castillo et al., 2013; Anabousy et al., 2014; Bozic, 2015; Holström, 2018).

7. REFERENCIAS

AGUDELO J. (2021). *Diseño de proyecto pedagógico para la enseñanza de las gráficas trigonométricas fundamentales desde el software GeoGebra como herramienta didáctica en estudiantes del grado 10 A del Colegio Canadiense* [Tesis de Maestría]. Universidad Nacional de Colombia, Colombia. Disponible en https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/81067

ANABOUSY A., DAHER W., BAYA'A N. Y ABU-NAJA M. (2014). Conceiving function transformations in different representations: middle school students working with technology. *Mathematics Education, 9*(2), 97-112. Disponible enhttps://www.researchgate.net/publication/267333033_Conceiving_Function_Transformations_in_Different_Representations_Middle_School_Students_Working_with_Technology

ARNON I., COTRILL J., DUBINSKY E., OKTAÇ A., ROA S., TRIGUEROS M. Y WELLER, K. (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer Verlag. ISBN: 978-1-4614-7965-9. DOI 10.1007/978-1-4614-7966-6

ASIALA M., BROWN A., DE VRIES D., DUBINSKY E., MATHEWS D. Y THOMAS K. (1997). A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics

Recepción:26/03/2022 *Aceptación: 22/05/2022*

Education. *MAA Notes, 2*, 37-54. DOI:10.1090/cbmath/006/01

BEKENE T. Y MACHABA F. (2022). The effect of GeoGebra on STEM students learning trigonometric functions. *Cogent Education, 9*(1), 1-18. DOI: 10.1080/2331186X.2022.2034240

BORBA M. y CONFREY J. (1996). A Student's Construction of Transformations of Functions in a Multiple Representational Environment. *Educational Studies in Mathematics, 31*, 319-337.

BORNSTEIN N. (2020). Teaching Transformations of Trigonometric Functions with Technology. *Journal of Interactive Media in Education, 2020*(1), 15, 1–9. https://jime.open.ac.uk/articles/10.5334/jime.503

BOZIC R. (2015). The Impact of Dynamic Properties of the Software Packages Mathematica and GeoGebra to The Examining and Graphing of Functions with Parameters. *European Union: Department of Mathematics and Informatics University of Novi Sad, Faculty of Sciences*. Disponible en https://personal.pmf.uns.ac.rs/nevena.dugandzija/wp-content/uploads/sites/42/2015/11/Parametarske-funkcije.pdf

CADENAS R. (2007). Carencias, dificultades y errores en los conocimientos matemáticos en alumnos del primer semestre de la Escuela de Educación de la Universidad de Los Andes. *Orbis. Revista Científica Ciencias Humanas, 2*(6), 68-84. Disponible en https://www.redalyc.org/pdf/709/70920605.pdf

CAMARENA P. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática, 10*(1), 145-175.

CASTILLO L., GUTIÉRREZ R. y PRIETO J. (2013). Una perspectiva de análisis de las transformaciones geométricas en curvas de la función $f(x)=e^{ax}$ utilizando el GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, 2*(2), 81-92. ISSN 2237- 9657. Disponibleenhttps://www.researchgate.net/publication/290437374_Una_perspectiva_de_analisis_de_las_transformaciones_geometricas_en_curvas_de_la_funcion_fxeax_utilizando_el_GeoGebra

DUBINSKY E. Y LEWIN P. (1986). Reflective abstraction and mathematics education: the Genetic Decomposition of induction and compactness. *The Journal of Mathematical Behavior,* 5, 55-92. Disponible enhttp://www.math.kent.edu/~edd/RAMED.pdf

DUBINSKY E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática, 08*(03), 24-41. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/10056/1/Aplicacion1996Dubinsky.pdf

FARABELLO S.P., TRIGUEROS M. (2020). La Transformación de Funciones en el aula de Física. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16*(58), 25-47. ISSN: 1815-0640. Disponible en: https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/82/23

FAULKENBERRY E. y FAULKENBERRY T. (2010). Transforming the way we teach function transformations. *MathematicsTeacher, 104(1)*, 29-33. Disponible en https://tomfaulkenberry.github.io/research/papers/MT.pdf

GIL SUÁREZ A. (2014). *Diseño e Implementación de una estrategia didáctica para la enseñanza de las funciones trigonométricas en los números reales para grado décimo mediante la modelación matemática y las TIC: Estudio de caso en el grupo 10° B de la Institución Educativa Montecarlo-Guillermo Gaviria Correa, del municipio de Medellín* [Trabajo final de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Colombia]. Disponible en https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/21664/98672018.2014.-pdf?sequence=1&isAllowed=y

HINOJOS J., MONTIEL G. y TORRES D. (2015). *La posición del péndulo, introducción a la función trigonométrica con GeoGebra* [Conferencia XXV Semana Nacional de Investigación y Docencia en Matemáticas, México]. Disponible en https://www.researchgate.net/publication/308178854_La_posicion_del_pendulo_introduccion_a_la_-funcion_trigonometrica_con_GeoGebra

HOLLSTRÖM F. (2018). *Translation av funktionsgrafer med dynamiska matematikprogram. En fallstudie av gymnasieelevers undersökande arbetssätt med GeoGebra* [Tesis independiente]. Linköpings universitet, Matematiska institutionen, Suecia. Disponible en http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1232304/FULLTEXT01.pdf

MOLANO D. (2022). *Estrategia Pedagógica Soportada en EXeLearning para la Comprensión de Funciones Trigonométricas y sus Diferentes Representaciones, en la I.E. Santa Rosa de Lima de Arbela en La Vega - Cauca* [Tesis de Maestría]. Universidad de Cartagena, Colombia. Disponible en https://repositorio.unicartagena.edu.co/handle/11227/15665

MORENO M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralba (Eds.), *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp 81-96). Córdoba, España: Universidad de Córdoba. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1325/

OCDE. (2004). Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana. Madrid, España: Santillana Educación S.L. Disponible en https://www.oecd.org/pisa/39732493.pdf

PADILLA I. y ACEVEDO J. (2021). Conocimiento especializado del profesor que enseña la reflexión de la función trigonométrica seno: Mediaciones con TIC. *Eco Matemático, 12*(1), 93-106. ISSN: 1794-8231. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/23414/1/Padilla021Conocimiento.pdf

TACURI J. y COAQUIRA V. (2019). Influencia del software GeoGebra en el aprendizaje de las funciones trigonométricas en quinto secundaria de la I.E. "Los Licenciados" 2018. *Revista Investigación, 27*(1), 165-174. ISSN: 1684-0089. Disponible en http://revistas.unsch.edu.pe/index.php/investigacion/article/view/118

TRIGUEROS M. Y URSINI S. (2003). First-year undergraduates' difficulties in working with different uses of variable. *Research in collegiatemathematicseducation, 12*, 1-29. DOI:10.1090/cbmath/012/01

TRIGUEROS M. (2006). Ideas acerca del movimiento del péndulo. Un estudio desde una perspectiva de modelación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 11*(31), 1207-1240. Disponible en https://www.scielo.org.mx/pdf/rmie/v11n31/1405-6666-rmie-11-31-1207.pdf

TRIGUEROS M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las Matemáticas. *Innovación Educativa, 9*(46), 75-87. Disponible en https://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894008.pdf
URSINI S., ESCAREÑO F., MONTES D. y TRIGUEROS M. (2005). *Enseñanza del Algebra Elemental. Una propuesta alternativa*. México: Ed. Trillas. ISBN: 9789682467523
VERGARA J. (2021). Dinamizando funciones trigonométricas con GeoGebra. *Números, 109*, 151-160. ISSN: 1887-1984. Disponible en https://www.researchgate.net/publication/358412118_Dinamizando_funciones_trigonometricas_con_GeoGebra

Sergio Pablo Farabello

Especialista en Enseñanza de las Ciencias Experimentales y la Matemática. Escuela de Humanidades, Universidad Nacional de San Martín, Argentina. Estudiante del Doctorado en Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, Mención Matemática. UNICEN, Argentina.

Profesor Titular Ordinario de Matemática I y Matemática II del Ciclo de Cursado Común. Facultad de Bromatología. Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina.