REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Análisis matemático y didáctico de una pregunta generatriz para enseñar afinidades y ecuaciones lineales en dos variables en la escuela secundaria

Estefanía Laplace

elaplace@fio.unicen.edu.ar

Facultad de Ingeniería Olavarría, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina

Resumen

En este trabajo se propone el análisis matemático y didáctico de la pregunta generatriz Q_0 *¿Cómo administrar el kiosco de la escuela para obtener ganancias?,* que integra un Recorrido de estudio e investigación (REI) para enseñar, entre otras, las organizaciones matemáticas (OM) vinculadas a las afinidades y ecuaciones lineales en dos variables correspondientes al diseño curricular de 4° año de la escuela secundaria argentina. El desarrollo del REI contribuye a iniciar a los estudiantes en un proceso de modelización algebraico funcional, que es poco frecuente en este nivel escolar. Se sintetizan aquí brevemente los conocimientos matemáticos que este dispositivo permitiría estudiar a partir del árbol de cuestiones que surgen de la pregunta generatriz y se adelantan algunas de las decisiones didácticas consideradas para la implementación del REI en el aula.

Palabras clave: Recorrido de estudio e investigación; Teoría Antropológica de lo Didáctico; Modelización algebraico funcional; Afinidades lineales; Ecuaciones Lineales; Escuela secundaria.

Mathematical and didactic analysis of a generating question to teach affinities and linear equations in two variables in secondary school

Abstract

This paper proposes the mathematical and didactic analysis of the generating question Q_0: *How to manage the school kiosk to obtain profit?* which integrates a Study and Research Path (SRP) to teach, among others, mathematical organizations (OM) linked to the affinities and linear equations in two variables corresponding to the curricular design of the 4th year of the Argentine secondary school. The development of the SRP allows to initiate students into a functional algebraic modelling process, which is rare at this school level. The mathematical knowledge that this device would allow to study from the tree of questions arising from the generating question is briefly synthesized here, and some of the didactic decisions considered for the implementation of the SRP in the classroom are advanced.

Keywords: Study and research path; Anthropological Theory of the Didactic; Functional algebraic modeling; linear affinities; Linear equations; High school.

Analyse mathématique et didactique d'une question génératrice pour enseigner les affinités et les équations linéaires à deux variables au secondaire

Resumé

Cet article propose l'analyse mathématique et didactique de la question génératrice Q_0 : *Comment gérer le kiosque scolaire pour obtenir du profit ?* qui intègre un parcours d'étude et de recherche (PER) pour enseigner, entre autres, les organisations mathématiques (OM) liées aux affinités et équations linéaires à deux variables correspondant à la conception curriculaire de la 4e année du secondaire argentin. Le développement du PER permet d'initier les élèves dans une démarche de modélisation algébrique fonctionnelle, ce qui est rare à ce niveau scolaire. Les connaissances mathématiques que ce dispositif permettrait d'étudier à partir de l'arbre des questions qui découlent de la question génératrice sont brièvement synthétisées ici, et certaines des décisions didactiques envisagées pour la mise en œuvre du PER en classe sont avancées.

Mots clés : Parcours d'étude et de recherche ; Théorie Anthropologique du Didactique ; Modélisation algébrique fonctionnelle ; affinités linéaires ; Équations linéaires ; Enseignement secondaire.

Análise matemática e didática de uma questão geradora para ensinar afinidades e equações lineares em duas variáveis no ensino médio.

Resumo

Este trabalho propõe a análise matemática e didática da questão geradora Q_0: *Como gerir o quiosque escolar para obter lucro?* que integra uma Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) para ensinar, entre outros, as organizações matemáticas (OM) ligadas a afinidades e equações lineares em duas variáveis correspondentes ao desenho curricular do 4º ano da escola secundária argentina. O desenvolvimento do PEP ajuda a iniciar os alunos em um processo de modelagem algébrica funcional, o que é raro neste nível escolar. O conhecimento matemático que este dispositivo permitiria estudar a partir da árvore de perguntas que surgem da pergunta geradora é aqui sintetizado brevemente, e algumas das decisões didáticas consideradas para a implementação do PEP em sala de aula são avançadas.

Palavras chave: Percurso de estudo e pesquisa; Teoria Antropológica do Didático; Modelagem algébrica funcional; afinidades lineares; Equações lineares; Escola Secundária.

1. INTRODUCCIÓN

En el paradigma de enseñanza hoy dominante en la escuela secundaria, el cuestionamiento del saber, las preguntas que le dieron origen, las respuestas a dichas preguntas y los aspectos que evidencian la utilidad inherente de las matemáticas a todo nivel en la sociedad, son poco frecuentes. Contrariamente, predomina la práctica de la repetición y de la "definición", que consiste en reproducir lo que el profesor explica, establece o enuncia. Incluso, la mera enunciación arbitraria de los "pasos" para resolver una ecuación, para aplicar una fórmula, cuyo origen se desconoce y nadie cuestiona, o para realizar una tarea, se aceptan como explicaciones, que claramente no son tales. Los estudiantes son así convocados a repetir sin cuestionamiento alguno, de manera más o menos precisa lo que el profesor ha "mostrado".

Particularmente el estudio de las ecuaciones lineales en dos variables y funciones de primer grado en una variable, que son objeto de interés en este trabajo, se tratan ignorando los aspectos geométricos y las equivalencias entre las ecuaciones. En su lugar, el estudio solo se enfoca en el objeto algebraico función, considerando una sola forma posible de dependencia "causada" por la variación de la variable independiente, que se considera como universal, en lugar de ocasional. Esta decisión didáctica, tiene consecuencias bastante negativas para la enseñanza del álgebra, que en general sucede después, reducida a la "introducción al lenguaje algebraico" y a la resolución de ecuaciones elementales.

El álgebra escolar ha sido uno de los temas centrales tratados por Chevallard en la formulación de la teoría de la Transposición Didáctica precursora de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). En diversos trabajos, Chevallard (1984, 1989, 1990, 1994) propone una enseñanza del álgebra que deje de lado su deslucido papel como generalización de la aritmética y que se la considere como un instrumento de modelización. Posteriormente, los trabajos de Gascón (1993, 1999), Bolea (2002) y Bolea, Bosch y Gascón (2001) que retoman y profundizan las ideas anteriores, originando nuevas investigaciones como la de Ruíz Munzón (2010) y Gascón, Bosch, Ruiz-Munzón (2017) vinculadas a la modelización algebraico funcional.

A pesar de todo el conocimiento didáctico acumulado, la enseñanza del álgebra en la escuela secundaria continúa realizándose como una *generalización de la aritmética*, donde las técnicas algebraicas "surgen" a partir de las técnicas aritméticas de resolución de problemas verbales, identificando así al álgebra con el "lenguaje algebraico". Las letras se utilizan para reemplazar los números propuestos como incógnitas en algún problema o como resultado de ecuaciones, que en su mayoría tienen solución. También las letras aparecen en la denotación de las funciones, ocupando el lugar de la variable, pero sin una problematización real de su dominio de definición. Las fórmulas se reducen a meras reglas para realizar cálculos numéricos, no se proponen como el resultado de cálculos algebraicos ni conducen a la generación de nuevos tipos de problemas (Gascón, Bosch, Ruiz-Munzón, 2017).

En este trabajo se propone un REI que busca promover la modelización algebraica en la escuela secundaria, conforme a las investigaciones realizadas en el marco de la TAD. Se utiliza una pregunta de potencial interés para los estudiantes que se refiere a cómo gestionar un kiosco instalado en la escuela, para que dé ganancias a sus administradores: los estudiantes. Nuestro equipo ha desarrollado varios REI para la escuela secundaria (Gazzola 2018; Llanos y Otero, 2013, 2015; Otero, Llanos, Gazzola, 2012; Otero, Llanos, Arlego, Gazzola, 2017; Salgado, Otero, 2020) en el que se presenta aquí se abordan las obras relativas a las afinidades y ecuaciones lineales, con énfasis en los aspectos algebraicos y geométricos.

2. MARCO TEÓRICO

Se adopta el referencial de la TAD (Chevallard,1999, 2005, 2007, 2009, 2012, 2013) y algunas de sus nociones fundamentales como la de *praxeología*, que designa a un modelo único, con el cual, es posible modelar cualquier actividad humana regularmente realizada (Chevallard, 1999). La palabra regularmente, significa que una praxeología no es algo fortuito, sino que es realizado con relativa continuidad y tampoco es, una actividad individual. La noción de praxeología expresa el carácter antropológico y pragmático de la TAD (Otero, 2021). La palabra alude a dos niveles: el de la *praxis*, o saber hacer, compuesto por los *tipos de tareas* y cuestiones que se estudian, así como las *técnicas* que se emplean para resolverlas; y el del *logos* o saber, que se construye para dar razón o justificar el saber hacer, constituido por las *tecnologías* que justifican a las técnicas, y las *teorías* que justifican a las tecnologías.

Otra noción central ya formulada por Chevallard en 1989 ha sido la de *modelización matemática*, de manera que toda actividad matemática, es considerada una actividad de modelización. La modelización supone, por un lado, la existencia de un sistema, matemático o no, y un modelo matemático de ese sistema. El proceso se desarrolla en tres etapas: 1) se define el sistema a estudiar, se analizan los aspectos más importantes del sistema como las variables en juego y el "dominio de realidad" del fenómeno en cuestión; 2) se construye un modelo matemático, estableciendo relaciones entre las variables y 3) se trabaja en el modelo con el fin de producir conocimiento matemático relativo al sistema estudiado. De esta manera el proceso de modelización algebraico funcional tendrá lugar cuando se construyan modelos algebraicos que permitan el estudio de parámetros y variables, variación de parámetros, intercambios de parámetros y variables y relaciones funcionales entre magnitudes de las variables (Otero, 2021).

El paradigma *de la investigación y del cuestionamiento del mundo* es propuesto por Chevallard en la TAD, como alternativa a la pedagogía dominante. Los REI son dispositivos didácticos que permiten conservar las características del nuevo paradigma. Parten de una pregunta generatriz Q_0, tal que la construcción de una posible respuesta conduce a analizar preguntas derivadas de Q_0 en función de las necesidades de conocimiento generadas por el estudio de la misma, y también en función de las decisiones tomadas por el grupo de estudio (Chevallard, 2013). Algunos ejemplos de preguntas generatrices son: ¿Cómo hacer un cálculo tratándose de números que incluyen muchas cifras?, ¿Cómo determinar la distancia entre dos puntos, accesibles o no, del espacio topográfico?, ¿Qué fuerza ejercer para vencer una resistencia dada?, ¿Cómo determinar uno u otro elemento de una figura trazada en una hoja cuando algunos de sus elementos útiles caen fuera de esa hoja?, ¿Cómo determinar el costo de utilización de un teléfono celular en función del uso que se hace de él? (Chevallard, 2013).

Para responder la pregunta ¿En qué consiste estudiar una obra? la TAD ha desarrollado un modelo, al que ha denominado Herbartiano. Es importante recordar aquí, que las preguntas son también obras fundamentales, creadas útilmente por los hombres (Otero, 2021). Dicho modelo explicita lo que sucede cuando un estudiante x o una clase X estudia una pregunta Q con la supervisión de Y, o cuándo un investigador ξ, o un equipo de investigación Θ estudia una pregunta Q posiblemente con la supervisión de un director de investigación ζ, o un conjunto de directores Z, formalmente se escribe:

$$S\ (X;\ Y;\ Q) \hookrightarrow R \qquad (1)$$

La notación utilizada en (1), indica que cuando se explora una pregunta Q, el sistema didáctico o el sistema de investigación debe producir una respuesta R (indicado con la flecha $\hookrightarrow$) (Chevallard, 2009). La respuesta suele escribirse con un corazón $R^{\heartsuit}$, para destacar que dicha respuesta estará en el corazón del sistema didáctico, y que durante un tiempo será la respuesta "autorizada" a Q. Una respuesta no es solo una afirmación, sino una praxeología.

$$S\ (X;\ Y;\ Q) \hookrightarrow R^{\heartsuit} \qquad (2)$$

El símbolo ♥ en el exponente de R, representa la relatividad institucional del saber. Es decir que la respuesta se produce bajo determinadas condiciones y limitaciones propias de esa institución. La elaboración de $R^{\heartsuit}$ a partir de Q supone entonces una "fabricación", por parte del sistema S, de un medio didáctico M para explorar y construir la respuesta a Q. Los estudiantes o investigadores recolectan diversos instrumentos materiales o no. Esto conduce al denominado esquema Herbartiano semidesarrollado:

$$[S\ (X;\ Y;\ Q) \rightharpoonup M] \hookrightarrow R^{\heartsuit} \qquad (3)$$

La respuesta a Q se elabora siguiendo el modelo que propone el esquema herbartiano desarrollado (4), que Chevallard (2013) utiliza para definir el constructo REI. El estudio de Q es realizado por un grupo de estudio X, bajo la dirección de un profesor y, o de un equipo de profesores Y, generando un sistema didáctico S (X; Y; Q). El medio M, está formado por preguntas derivadas del estudio Q_i que pueden ser introducidas por los estudiantes o también por el profesor, respuestas preestablecidas $R^{\diamond}$ previamente construidas a las cuales se puede tener acceso en la web, libros, textos del profesor, etc.; y obras O_j como teorías, praxeologías, conocimientos previos que permiten producir una respuesta posible a Q. (Otero, 2021). El esquema Herbartiano desarrollado (Chevallard, 2009) es:

$$[S\ (X;\ Y;\ Q) \rightharpoonup \{R_1^{\diamond}, R_2^{\diamond}, \dots, R_n^{\diamond}, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p, D_p, \dots Dq\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit} \ (4)$$

3. EL REI

3.1. La Pregunta generatriz y sus preguntas derivadas

A partir de la pregunta generatriz Q_0: *¿Cómo administrar el kiosco de la escuela para obtener ganancias?* surgen nuevas cuestiones derivadas Q_i que conforman la arborescencia de preguntas característica de un REI. El estudio y la investigación de cada una de ellas, convoca el tratamiento de diferentes praxeologías incluidas en el diseño curricular de la institución donde se prevé implementar este REI. La adaptación del dispositivo a una cierta institución, conduce a proponer un REI "finalizado" pues se busca enseñar los saberes del programa de una escuela preuniversitaria en particular. En la Figura 1, se sintetizan algunas de las preguntas que podrían generarse y las OM o praxeologías vinculadas a las mismas, con el objetivo de mostrar el alcance del REI.

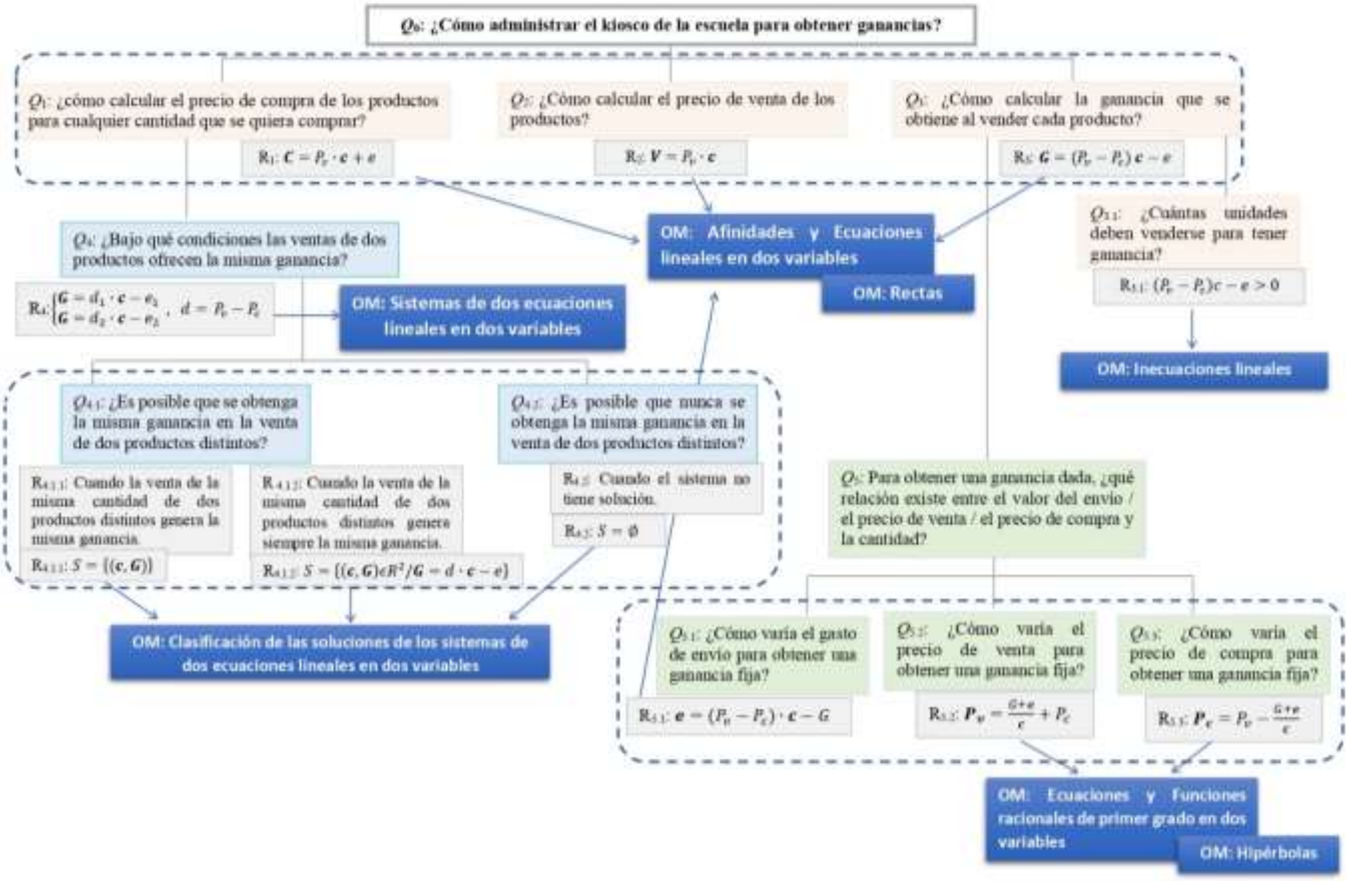

Figura 1: Posibles Q y OM del REI

El estudio de Q_0 conduce a Q_1: ¿Cómo calcular el precio de compra de los productos para cualquier cantidad que se quiera comprar? Para responder a Q_1 se establecen los *parámetros* y las *variables* que permitirán formular las ecuaciones lineales en dos variables asociadas, en este caso, al precio de compra de los productos.

Inicialmente, se consideran *parámetros* al *precio de los productos:*$P_c, P_c \in R^+$ y al *envío:* $e, e \in R^+$. Se consideran *variables* a la *cantidad a comprar:* $c, c \in R^+$ (podría considerarse, $c \in N$ para el caso de los productos que se venden por unidad) y al *valor total de la compra en pesos:* $C, C \in R^+$. La ecuación que vincula los parámetros y las variables definidas es:

$$C = P_c \cdot c + e$$

La ecuación que permite calcular el valor total de la compra de cada producto para cualquier cantidad es: $C = P_c \cdot c + e$ (R_1). Esta ecuación es una *Ecuación lineal en dos variables* (c, C). En el modelo hallado, P_c es un *parámetro* que representa a un conjunto de posibles valores de p, no es un valor fijo, por el contrario, forma parte de un modelo que representa cualquier compra que se quiera hacer. Lo mismo sucede con e.

También se plantea Q_2: ¿Cómo calcular el precio de venta de los productos? Para responder a Q_2 se definen los parámetros *coeficiente de ganancia*: $k, k \epsilon R^+$ y *precio de venta:* $P_v = P_c \cdot k$, $P_v \epsilon R^+$, y las variables *valor total de la venta:* $V, V \epsilon R^+$y *cantidad vendida:* $c, c \in R^+$. La ecuación resulta,

$$V = P_v \cdot c$$

La ecuación para calcular el valor total de la venta de cada producto para cualquier cantidad es: $V = P_v \cdot c$ (R_2). La ecuación hallada es también una *Ecuación lineal en dos variables* (c, V).

Para Q_3: ¿Qué ganancia se obtiene al vender cada producto?, se define la variable *ganancia:* $G, G \epsilon R$. Considerando,

$$Ganancia = Ingresos - Costos$$

$$G = (P_v - P_c) \cdot c - e \qquad (5)$$

La ecuación (5) permite calcular la ganancia que se obtiene al vender cualquier cantidad de cada (R_3). Es una *Ecuación lineal en dos variables* (c, G).

Cada una de las ecuaciones anteriores tiene asociada una *Función afín* definida de $R \to R$. Si bien en los modelos hallados la variable independiente representa una cantidad (positiva y en algunos casos discreta), es posible estudiar las afinidades con dominio en los reales e interpretar sus soluciones en el contexto del kiosco.

De Q_3 deriva $Q_{3.1}$: ¿Cuántas unidades deben venderse para que haya ganancia? Para calcular la cantidad de productos que se necesitan vender para obtener ganancias se debe plantear $G > 0$, de lo contrario habría pérdidas.

$$c > \frac{e}{(P_v - P_c)}$$

Siendo $P_v - P_c > 0$. La respuesta $R_{1.3}$ requiere estudiar las *Inecuaciones lineales*.

El tratamiento de la *pendiente* de la recta se realiza geométricamente a partir de las ecuaciones lineales en dos variables, sin reducir el estudio a los aspectos funcionales. En consecuencia

- La *pendiente* de una recta no vertical ($c_1 \neq c_2$) que pasa por los puntos $P_1(c_1; G_1)$ y $P_2(c_2; G_2)$ es
$$m = \frac{G_1 - G_2}{c_1 - c_2}$$
$G_1 - G_2 = \Delta_G$ es el cambio de la variable G
$c_1 - c_2 = \Delta_c$ es el cambio de la variable c con $c_1 \neq c_2$
Si $c_1 = c_2$, se tiene una recta vertical; su pendiente no está definida.

Con el objetivo de investigar sobre los beneficios que podría ofrecer el kiosco, se pueden comparar las ganancias que se obtienen al vender los productos. Este cuestionamiento conduce a *Q*4: ¿Bajo qué condiciones las ventas de dos productos ofrecen la misma ganancia? Para responder a Q_4, es necesario estudiar los *Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables*,

- De las ecuaciones de dos productos se obtiene el sistema,
$$\begin{cases} G = d_1 \cdot c - e_1 \\ G = d_2 \cdot c - e_2 \end{cases}, \quad d = P_v - P_c$$
Existen varias *técnicas* para resolver los sistemas de ecuaciones, cuya consideración escolar muestra que son matemáticamente equivalentes.

Hasta el momento, las ecuaciones halladas incorporan variables y parámetros bien definidos y diferenciados. Encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales en dos variables conduce a estudiar la variación de los parámetros.

$Q_{4.1}$: ¿Es posible que se obtenga la misma ganancia en la venta de dos productos distintos? Si el sistema tiene una única solución, Sistema compatible determinado, entonces es posible afirmar que los dos productos ofrecen la misma ganancia cuando se vende una misma cantidad de ellos ($R_{4.1.1}$). Si el sistema tiene más de una solución, Sistema Compatible indeterminado, entonces es posible afirmar que ambos productos siempre ofrecen la misma ganancia al venderse en cantidades iguales ($R_{4.1.2}$).

$Q_{4.2}$: ¿Es posible que nunca se obtenga la misma ganancia en la venta de dos productos distintos? Si el sistema no tiene solución, Sistema incompatible, entonces la respuesta será que la venta de los productos seleccionados nunca permite obtener la misma ganancia ($R_{4.2}$).

Nuevamente y con la intención de investigar todas las formas posibles para obtener mayores beneficios en el kiosco, se puede analizar cuánto se puede reducir el precio de compra y gasto de envío y cuál sería el precio de venta más convenientes para aumentar ganancias.

Es destacable que este REI produzca un doble tratamiento de los modelos generados. Por un lado, distinguir entre parámetros y variables, y estudiar los efectos que produce la variación de alguno de los parámetros sobre el modelo, como se ha desarrollado anteriormente. Por otro, investigar y estudiar las transformaciones del modelo al intercambiar las variables y los parámetros, considerando que en este caso puedan surgir nuevos conocimientos. En lo que sigue se analizan los modelos que pueden generarse al intercambiar variables y parámetros, lo cual conlleva a estudiar las *Ecuaciones y funciones racionales en dos variables* y las *Hipérbolas* que de ellas se desprenden.

Por ejemplo, partiendo de la ecuación de ganancia (5) es posible preguntar Q_5: Para obtener una ganancia dada, ¿qué relación existe entre el valor del envío / el precio de venta / el precio de compra y la cantidad? Esto conduce a considerar a G como parámetro y c, e, P_v, P_c como variables.

En primer lugar, analizando las variaciones del valor del envío surge la pregunta $Q_{5.1}$, ¿Cómo varia el gasto de envío para obtener una ganancia fija? De la ecuación (5), si se fija G además de los parámetros P_v y P_c, se obtiene la ecuación para las variables c y e
$$e = (P_v - P_c) \cdot c - G \qquad (6)$$
Una respuesta posible es $R_{5.1}$: El envío varía en forma constante y depende de c de acuerdo a la ecuación (6). *Ecuación lineal en dos variables* $(c; e)$. Considerar a G como un parámetro no es asumir que se corresponde con un valor fijo, por el contrario, G es un parámetro porque engloba a un conjunto de ganancias posibles.

En segundo lugar, considerando las variaciones del precio de venta se puede formular $Q_{5.2}$: ¿Cómo varía el precio de venta para obtener una ganancia fija? De la ecuación (5), si se fija G además de los parámetros e y P_c, se obtiene la ecuación para las variables c y P_v
$$P_v = \frac{e + G}{c} + P_c \qquad (7)$$
Una respuesta a $Q_{5.2}$ es $R_{5.2}$: El precio de venta no varía en forma constante, sus valores dependen de c y aumenta conforme c crece, en la forma que describe la ecuación (7). *Ecuación fraccionaria en dos variables* $(c; P_v)$.

Finalmente, en relación con el precio de compra la pregunta puede ser $Q_{5.3}$: ¿Cómo puede variar el precio de compra para obtener una ganancia fija? De la ecuación (5), si se fija G además de los parámetros e y P_v, se obtiene la ecuación para las variables c y P_c
$$P_c = P_v - \frac{e + G}{c} \qquad (8)$$
Una respuesta a $Q_{5.3}$ es $R_{5.3}$: El precio de compra no varía en forma constante, sus valores dependen de c y disminuyen cuando c crece, en la forma que describe la ecuación (8). *Ecuación fraccionaria en dos variables* $(c; P_c)$.

De la misma manera que fue posible estudiar con Q_5 la variación de P_v, P_c y e fijando G, puede realizarse un estudio similar con c y analizar cada ecuación resultante.

Una posible respuesta R♥ integra y utiliza los modelos de compra, venta y ganancia desarrollados y sus transformaciones.

3.2. Implementación del REI

La implementación del REI en el aula excede largamente el análisis praxeológico de la pregunta generatriz inicial. Para administrar el kiosco se deben considerar los productos que se comercializarán en el mismo. Teniendo en cuenta que en el mercado existe una gran variedad de productos y precios se propone, de manera exploratoria, una lista con productos que se venden por unidad (generando una variable discreta) y otros a granel (variable continua). Se eligen 20 productos, considerando que es una cantidad suficiente como para no reducir el estudio a una simple ecuación, pero limitada como para que existan coincidencias en la selección de al menos algunos productos.

Para proponer el estudio de Q_0 en el aula, también se asigna un monto fijo para la inversión inicial del kiosco. Esto permite armar un stock y calcular los precios de compra de cada producto en función de las cantidades elegidas. También, analizar la ganancia y establecer un modelo de compra y venta que permita recuperar la inversión inicial. La tarea propone seleccionar 10 productos de la lista, para generar distintos stocks de kioscos en el aula. Se considera el uso de planillas de cálculo, para sistematizar los cálculos, lo cual requiere programar las celdas y tomar en cuenta los modelos generados.

En consecuencia, la pregunta generatriz se formula en la escuela de la siguiente manera: Q_0*: ¿Cómo administrar el kiosco de la escuela para obtener ganancias a partir de la inversión de un monto fijo?* Por medio del documento que se muestra en la Figura 2.

Los alumnos de sexto año de la escuela nos han pedido que los ayudemos a organizarse para administrar durante todo el año el kiosco. Para comenzar realizaron una lista de productos que desean vender. En la lista se incluye el precio al que pueden comprar cada producto. Algunos productos los compran directamente en distribuidora y otros los reciben directamente en la escuela por lo que tienen un gasto de envío que se detalla en la lista y que varía de acuerdo al producto. Los estudiantes cuentan con $60000 para dar inicio al kiosco y comprar todos los productos.

	Producto	Marca	Cantidad	Precio	Envío*
1	Alfajores	Guaimayen	x 40 unid	$ 700	$90
2	Bon O Bon	Arcor	x 30 unid	$520	$120
3	Titas	Terrabussi	x 36 unid	$950	$80
4	Rhodesias	Terrabussi	x 36 unid	$980	$120
5	Chocolate con leche	Arcor	x 30 unid	$950	-
6	Caramelos masticables	Arcor	x 800 g (bolsa)	$270	$100
7	Caramelos ButterToffee	Arcor	x 800 g (bolsa)	$425	-
8	Gomitas	Misky	x 1000 g (bolsa)	$470	$100
9	Pastillas	Menthoplus	x 12 unid	$525	$120
10	Chicles	Beldent	x 20 unid	$620	$100
11	Saladix	Arcor	x 12 paq	$440	$100
12	Galletitas dulces	Polvorita	x unid	$22	$80
13	Caramelos palitos de la selva	Stani	x 600 g (bolsa)	$540	$80
14	Barras de cereal	Arcor	x 20 unid	$750	$120
15	Turrones	Arcor	x 50 unid	$890	$80
16	Sándwich (jamón y queso)	De panadería	x unid	$70	$90
17	Papas fritas	Krachitos	x 65 g (bolsa)	$75	$80
18	Cereales	Granix	x 1250 g (bolsa)	$490	-
19	Jugo (200 ml)	Baggio	x 18 unid	$540	$120
20	Alfajores	Milka	x 24 unid	$1800	-

*El envío es único por producto, sin importar la cantidad que se compre.

a) En grupos, elaboren una lista seleccionando 10 productos en los cuales se incluyan 6 que se vendan por unidad y 4 por peso. Indiquen qué cantidad de cada uno se podría comprar teniendo en cuenta que se dispone de $60000 para gastar en total.

b) ¿Cómo se puede expresar el precio de compra de los productos para cualquier cantidad que se quiera comprar?

Figura 2: Tarea para el aula

Conforme a las etapas de la modelización matemática (Chevallard, 1989) primero hay que definir el sistema a estudiar, analizar sus aspectos más importantes como las variables en juego y el "dominio de realidad" del fenómeno en cuestión. En este sentido, la pregunta generatriz Q_0 se plantea en un contexto especial ya que refiere a la administración del kiosco de la escuela, que funciona en los recreos y no tiene gastos de funcionamiento a excepción, en algunos casos, del envío de los productos.

En el aula, las primeras preguntas derivadas de Q_0 se relacionarían con la compra, venta y ganancia de los productos, dando lugar al estudio de las "afinidades y ecuaciones lineales en dos variables" (Figura 1). Esta etapa posibilita que los estudiantes inicien un proceso de modelización algebraico funcional, generando modelos matemáticos relativamente sencillos que definen y distinguen parámetros y variables. Esta actividad es poco frecuente en este nivel escolar,

Indagar acerca de si dos productos podrían dar o no la misma ganancia, conduce a estudiar los "sistemas de ecuaciones lineales en dos variables" y su clasificación. Este estudio requiere analizar la variación de parámetros y su efecto sobre las soluciones, otra etapa de la modelización algebraica. Se puede utilizar en el aula algún software graficador, como por ejemplo GeoGebra, para cumplir el requisito curricular de emplear el sistema de representación en coordenadas cartesianas, además, dicho software, evidencia la equivalencia de las diferentes expresiones algebraicas.

Con el objetivo de investigar alternativas para obtener mayores beneficios para el kiosco, se propone analizar cómo podrían variar el gasto de envío y los precios de venta y compra, considerando una ganancia fija. Esto implica analizar los valores que pueden tomar los parámetros, considerados ahora como variables. Se avanza así en el proceso de modelización algebraico funcional estudiando las transformaciones que produce el intercambio de los parámetros con las variables en el modelo.

Algunas de las ecuaciones que se obtienen al intercambiar los parámetros con las variables son expresiones algebraicas fraccionarias de primer grado en dos variables". Estas ecuaciones permiten analizar las variaciones del precio de venta y del precio de compra y gastos de envío en el contexto del problema planteado. Las planillas de cálculo, permiten realizar este análisis, sistematizando las operaciones y evidenciando la dependencia no lineal entre las variables.

La respuesta R♥ de este REI en el aula, integra y utiliza los modelos de compra, venta y ganancia. También forma parte de R♥ la investigación en torno a la ganancia que deriva en el estudio de la variación de los parámetros, por un lado, y del intercambio entre variables y parámetros por otro.

4. REFLEXIONES FINALES

En este trabajo se realiza un análisis del alcance matemático y didáctico de la pregunta generatriz Q_0 *¿Cómo administrar el kiosco de la escuela para obtener ganancias?* El mismo permite al investigador explorar los conocimientos matemáticos que se necesita para tratar y responder Q_0 y que podrían estudiarse en el desarrollo del REI. Considerar su implementación en el aula implica realizar transformaciones para contextualizar la pregunta, tales como circunscribir la cantidad de productos y sus precios, fijar un monto para la inversión inicial, es decir, reelaborar Q_0.

5. REFERENCIAS

Bolea, P. (2002), *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Tesis doctoral. Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M., Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques 21(3), pp*. 247-304. Grenoble : La Pensée Sauvage-Éditions.

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Première partie. L'évolution de la transposition didactique, *Petit x, (5), pp. 51-94.*

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petite x*, *19 pp. 43-72.*

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie : voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 23, 5-38.

Chevallard, Y. (1994). Enseignement de l'algèbre et transposition didactique. *Rendiconti del Seminario Matematico Università e Politecnico di Torino, 52 (2), pp. 175-237.*

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19 (2), pp*. 221-266.

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique . Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2009). La notion de PER : problèmes et avancées. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2012). Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement. Journal du séminaire TAD/IDD. Disponible en http://www.aixmrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/data/fdf/2011-2012/journal-tad-idd-2011-2012-7.pdf

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemática en la Sociedad de mañana: alegato a favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics, 2(2),* 161-182. doi:10.4471/redimat.2013.26

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *13(3)*, *pp. 295-332.*

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación Matemática 11(1),* 77-88.

Gascón, J., Bosch, M., & Ruiz-Munzón, N. (2017). El problema del álgebra elemental en la teoría antropológica de lo didáctico. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 25-47). Zaragoza: SEIEM.

Gazzola, M. P. (2018). *Diseño, implementación y análisis de un Recorrido de Estudio e Investigación codisciplinar en matemática y física en la Escuela Secundaria.* Tesis doctoral. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Llanos, V. C. & Otero, M. R. (2013) Operaciones con curvas y estudio de funciones. *Revista SUMA+ para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, 73,* 17-24. Valencia, España

Llanos, V. C. & Otero, M. R. (2015). Inserción de un REI en la escuela secundaria: el caso de las funciones polinómicas de segundo grado. *Relime, 18 (2),* 245-275. DOI: 10.12802/relime.13.1824

Otero, M. R.; Llanos, V. C. y Gazzola, M. P. (2012). La pedagogía de la investigación en la escuela secundaria y la implementación de Recorridos de Estudio e Investigación en matemática. *Revista Ciencia Escolar: enseñanza y modelización, 1 (2),* 31-42. Universidad Central de Chile.

Otero, M. R.; Llanos, V. C.; Arlego, M. y Gazzola, M: P. (2017). Co-disciplinary Mathematics and Physics Research and Study Courses (SRC) within two groups of pre-service teacher education. Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10) pp. 2972-2979. Dublin, Ireland.

Otero, M. R. (2021). *La formación de profesores: recursos para la enseñanza por indagación y el cuestionamiento*. Libro digital. Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos

Salgado, D., Otero, M. R. (2020). Enseñanza por investigación en un curso de matemática de nivel universitario: los gestos didácticos esenciales

Educação Matemática Pesquisa; vol. 22 p. 532 – 557.

Ruíz Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional.* Tesis doctoral. Departament de Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona.

Estefania Laplace

Profesora Adjunta con dedicación exclusiva de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). Docete del Departamento de Formación docente de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA. Alumna regular del Doctorado Enseñanza de las Ciencias, mención matemática. Profesora de Matemática (2006). Docente investigadora en el área de Matemática de la Facultad de Ingeniería (UNCPBA).