REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Números irracionales en el currículo de matemática básica

Alfonso Segundo Gómez Mulett

agomezm1@unicartagena.edu.co

Programa de Matemáticas, Universidad de Cartagena, Cartagena, Colombia.

Resumen

La enseñanza de los números irracionales en el currículo está orientada por documentos curriculares, libros de texto y los conocimientos del docente. Con base en los dos primeros aspectos se presenta un estudio para determinar los momentos y la forma en que el tema se inserta en el currículo de enseñanza primaria y secundaria, atendiendo también la influencia de las reformas curriculares. El desarrollo del trabajo es metodológicamente cualitativo, siguiendo los principios de integración, secuencia vertical, continuidad y coherencia horizontal, con un encuadre previo de aspectos históricos y epistemológicos. Se concluyó que la inserción de los números irracionales en el currículo se da de manera intermitente atendiendo a dos posturas de tipo práctico.

Palabras clave: Currículo, irracionales, epistemología, evolución conceptual, libros de texto.

Irrational numbers in the basic mathematics curriculum

Abstract

The teaching of irrational numbers in the curriculum is guided by curricular documents, textbooks and teacher's knowledge. Based on the first two, a study is presented to determine when and how the subject is inserted in the primary and secondary school curriculum, also taking into account the influence of curricular reforms. The development of the research is methodologically qualitative, following the principles of integration, vertical sequence, continuity and horizontal coherence, with a previous framing of historical and epistemological aspects. It was concluded that the insertion of irrational numbers in the curriculum occurs intermittently according to two practical postures.

Keywords: Curriculum, irrational, epistemology, conceptual evolution, textbooks.

Nombres irrationnels dans le programme de mathématiques de base

Résumé [Times New Roman 10]

L'enseignement des nombres irrationnels dans le programme est guidé par des documents du programme, des manuels et des connaissances de l'enseignant. Sur la base des deux premiers aspects, une étude est présentée pour déterminer les moments et la façon dont le sujet est intégré dans les programmes d'enseignement primaire et secondaire, en tenant compte également de l'influence des réformes des programmes. Le développement du travail est méthodologiquement qualitatif, suivant les principes d'intégration, de séquence verticale, de continuité et de cohérence horizontale, avec un encadrement préalable des aspects historiques et épistémologiques. Il a été conclu que l'insertion des nombres irrationnels dans le programme est donnée de manière intermittente en fonction de deux positions de type pratique.

Mots clés: Curriculum, irrationnel, épistémologie, évolution conceptuelle, manuels.

Recepción: 31/10/2022 *Aceptación: 15/03/2023*

1. INTRODUCCIÓN

La noción de currículo se desarrolla dentro de diferentes perspectivas, una de ellas consiste en considerarlo como construcción social, producto del esfuerzo conjunto y planificado de la comunidad educativa para conducir los procesos que coadyuvan a la formación del individuo y al fortalecimiento de su desarrollo personal; es decir, llevar de la manera más adecuada los procesos de enseñanza aprendizaje con los cuales se obtiene por resultado la apropiación de conocimientos específicos que conducen al crecimiento educativo.

Cualquiera que sea la noción de currículo, existe un conjunto de elementos comunes en todas sus descripciones: cultura, valores, prácticas sociales, fines, objetivos, métodos, recursos, conocimientos, actores, evaluación, etc. Estos elementos proporcionan información sobre qué enseñar, cuándo enseñar, cómo enseñar, y qué, cómo y cuándo evaluar, preguntas que integran dichos elementos en cuatro grandes grupos (Coll, 1994). La influencia de estos elementos implica la no neutralidad de la educación, el currículo hace una selección de la cultura con criterios explícitos, ciertos lineamientos vienen determinados desde afuera y están especificados en el currículo, entre ellos los llamados lineamientos curriculares que deciden los conocimientos que deben aprender los alumnos en las diferentes áreas del saber.

Para el caso de la matemática, los conocimientos incluidos en el currículo obedecen a políticas y directrices trazadas desde otras instancias predominantes en la cultura matemática, entre ellas la taxonomía de objetivos del aprendizaje de la matemática, las indicaciones de asociaciones internacionales como el Grupo de Estudios de Matemáticas Escolares (*School Mathematics Study Group*), la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (*International Commission on Mathematical Instruction*) y el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (*National Council of Teachers of Mathematics* NCTM), por mencionar algunas. Por otra parte, en el medio han marcado influencia documentos curriculares como: Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación matemática del NCTM y sus principios para la acción, lineamientos curriculares, estándares básicos de competencias matemáticas y derechos básicos de aprendizaje de matemáticas. Todos los mencionados, de alguna manera han sido determinantes en el diseño curricular de matemática para los niveles de enseñanza básica y media.

La presencia de diferentes organismos y teorías curriculares a través del tiempo ha logrado una estandarización del currículo, reproduciendo la dominación de una cultura académica sobre otras, implantando una hegemonía de conocimientos. Este poder otorgado niega al currículo la posibilidad de ser un producto de la historia humana y social, para convertirse en un medio a través del cual los grupos poderosos han ejercido una influencia muy significativa sobre los procesos de reproducción de la Sociedad (Kemmis, 1988). La resolución de problemas, el retorno a lo básico y el enfoque de aprendizaje por competencias son ejemplos de imposición de la cultura matemática predominantes en las últimas posturas curriculares.

Por obvias razones, en el currículo escolar, la enseñanza de los números en los primeros niveles educativos de preescolar y primaria comienza con los números naturales, luego siguen los números racionales positivos desde su representación utilizando fracciones, se continúa con la introducción de enteros y racionales negativos y se completa finalmente el sistema de los números reales. En este transcurrir aparecen los números irracionales, unas veces como resultado de ciertas operaciones aritméticas o algebraicas y otras por su necesidad en la geometría.

Dado que aparentemente parece no existir una formalización de los irracionales en el currículo de enseñanza básica y media, este trabajo se propone determinar en qué momentos del currículo aparecen dichos números, cuáles son los contextos donde surgen y con qué estrategias pedagógicas o didácticas son enseñados. Adicionalmente se analiza la presencia de estos números en libros de texto de amplia trayectoria en las reformas curriculares llevadas a cabo en Colombia.

2. METODOLOGÍA

La ruta metodológica seguida en este trabajo es de tipo cualitativo puesto que cubre una composición adecuada de técnicas con valor interpretativo para describir, analizar, descubrir y sintetizar diversos hechos en torno a un tema particular. Desde esta perspectiva se tiene una interpretación de un hecho en un contexto natural para tener conocimiento sobre una situación que involucra varios contextos: el currículo, los textos escolares y el campo de actuación didáctico.

Según Creswell (2013), metafóricamente la investigación cualitativa es una intrincada red compuesta de hilos diminutos, con diferentes colores, texturas y materiales; es un entretejido de diversos elementos, múltiples métodos y variados instrumentos. La investigación cualitativa empieza con observaciones preliminares, continúa con el examen de hechos, sujetos y elementos diversos para así culminar con hipótesis explicativas y una teoría fundamentada; en este caso, la observación comienza con el surgimiento histórico de los números irracionales, luego su inserción en el currículo y su revelación a los estudiantes a través de teorías y textos de estudio, para así fundamentar su evolución teórica epistémica y curricular.

Las observaciones preliminares ubican el concepto de irracional en la historia, contemplando explicaciones varias sobre el surgimiento de los números irracionales. En esta parte se comparan las aproximaciones al concepto de irracional en diversas épocas y según distintos autores. Estando ya explicada la noción de número irracional, mediante el análisis de contenido sobre normatividad, tendencias curriculares en matemática y reformas curriculares, se buscan los puntos o momentos de inserción del tema en el currículo siguiendo los principios del diseño curricular propuestos por Bolaños y Molina (2006): integración, secuencia vertical, continuidad y coherencia horizontal.

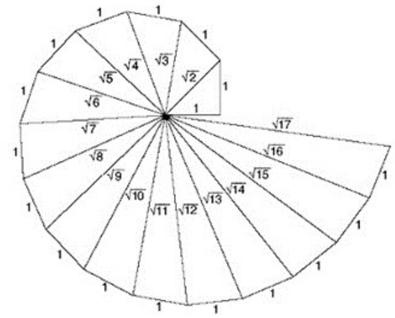
El principio de integración alude a la presentación del tema, relacionándolo con otros, de tal manera que su encaje sea pertinente tanto epistemológica como didácticamente; el principio de secuencia vertical apunta a la relación entre objetivos y contenidos y su encuadre de acuerdo con el nivel cognitivo de los estudiantes; el principio de continuidad se refiere al “carácter progresivo de los aprendizajes y la profundización que el estudiante va desarrollando en relación con el manejo de información, entrenamiento de capacidades, habilidades, destrezas, hábitos, actitudes y

Recepción: 31/10/2022 *Aceptación: 15/03/2023*

valores" (Rodríguez, Jiménez y Rodríguez, 2015, p. 9); y el principio de coherencia horizontal, se refiere a la coherencia del tema con los documentos curriculares que lo justifican, lineamientos, programas de curso, textos escolares, etc.
Finalmente, el análisis de libros de texto permite constatar las revelaciones de autores y docentes sobre los números irracionales analizando las diferentes posturas didácticas en la enseñanza del concepto. En la medida que se presentan los resultados se hace un análisis de cada situación, para que no se pierda la conexión entre el análisis de contenido y su relación con el currículo propuesto, el currículo presentado y el enfoque didáctico.

3. CONSIDERACIONES EPISTÉMICAS E HISTÓRICAS

Afirmar que existió una configuración del número irracional desde sus primeras apariciones es arriesgado, la falta de un concepto para describir un número irracional hizo difícil establecer una teoría para dichos números; por otra parte, la aritmética, el álgebra y la geometría fueron las fuentes de donde emanaron los primeros números irracionales, particularmente del teorema de Pitágoras, generador de raíces cuadradas no exactas en términos de números naturales, el cual tiene una historia imprecisa pues su origen es compartido por los antiguos pueblos de Mesopotamia, Egipto, India y China.
En el mundo griego antiguo, la escuela pitagórica consideraba que el número natural era el concepto fundamental para explicar el mundo y los fenómenos de la naturaleza, toda cosa era explicable con los números y las relaciones entre estos, una de ellas era la conmensurabilidad; dos segmentos son conmensurables cuando uno de ellos cabe un número entero de veces en el otro, es decir, existe un tercer segmento llamado unidad que cabe exactamente un número de veces m en uno de ellos y un número de veces n en el otro. Inicialmente para los pitagóricos existían números naturales y números conmensurables expresados en forma razón o fracción, lo conmensurable califica a todo lo que puede ser valuado o medido, así, dos segmentos conmensurables determinan una razón, un número racional hoy en día.
Los pitagóricos creían que todos los segmentos eran conmensurables, Hípaso de Metaponto demostró que existían por lo menos dos segmentos que no son conmensurables: la diagonal y el lado de un mismo pentágono regular; en esos tiempos, también se probó la inconmensurabilidad de expresar la longitud de la diagonal del cuadrado en función de su lado, es decir, aplicar el teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles. La aplicación reiterada del teorema de Pitágoras permitió a Teodoro de Cirene construir infinitos números irracionales mediante la llamada espiral de raíces cuadradas, formada por triángulos rectángulos contiguos, empezando una unidad de longitud con un triángulo rectángulo isósceles de lados una unidad de longitud, permaneciendo un lado con longitud fija la unidad (véase figura. 1).
Figura. 1: Espiral de Teodoro



Fuente: Wikipedia
Otro número inconmensurable o irracional de los llamados notables es el número pi denotado con la letra griega π, descubierto probablemente en Babilonia, mucho antes que las raíces cuadradas, obtenido al calcular la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Descubierto el número pi, puesto que no podía escribirse como una razón, varios matemáticos a lo largo de la historia se dedicaron a calcular un valor aproximado, así, por ejemplo, en uno de los documentos más antiguos, el Papiro de Rhind aparece un cálculo de pi en los siguientes términos: "Corta 1/9 del diámetro y construye un cuadrado sobre la longitud restante. Este cuadrado tiene la misma área que el circulo". Es decir, el área A del círculo es igual a 8/9 del diámetro d = 2r al cuadrado, A = d2(64/81) = 4r2(64/81) = r2(256/81), asignándosele a π el valor 256/81, aproximadamente 3.16.
La aparición de los irracionales o cantidades inconmensurables parece no haber sido una crisis desde lo científico, fue una cuestión histórica coyuntural superada a lo largo de los años, logrando agrandar el conjunto de los números y resolver problemas geométricos, entre ellos, el volumen del cono, el cilindro y la esfera. Los griegos llamaron a los números irracionales álogos (αλογος), la no razón, contrario a los racionales o la razón (λογος); estos nuevos números llevaron a una reformulación de la teoría de las proporciones haciéndoles argumentar la inconmensurabilidad a través de pruebas geométricas, ya que el álgebra aún no se había consolidado.
Pero en el mundo griego los inconmensurables aún no eran propiamente números, Euclides privilegia el número racional bajo la idea de proporción, "las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número"; tal como se presentan las cosas en esta dirección, convierten al expositor de estas ideas de inconmensurabilidad en un armador de rompecabezas; es más, se dan proporciones a través del mismo teorema de Pitágoras, el cuadrado construido sobre la diagonal de un cuadrado es al cuadrado original como 2 es a 1. Ante los sucesos anotados, "cualquier libro de matemática actual no es más que una instancia de un proceso de esta naturaleza, algunos no más que simples reconstrucciones de rompecabezas ya armados. Todo profesor de matemática haría bien informando de esto a sus discípulos" (Jiménez, 2006, p.99).
Para los antiguos griegos, número natural estaba asociado a agregado de unidades o magnitudes; número racional se asociaba a razón, proporción, conmensurabilidad; y número irracional era lo inconmensurable. Con el desarrollo posterior de la matemática, "las razones pasaron a ser cocientes y las proporciones se convirtieron en igualdades numéricas. Aún más, las razones entre conmensurables sufrieron la metamorfosis que las llevó a números racionales

y aquellas entre inconmensurables pasaron a ser números irracionales" (Jiménez, 2006, p.101).

Descubiertos los irracionales, el desarrollo del álgebra en la edad media por parte de árabes e indios buscó formas alternativas para el manejo de dichos números, el indio Bashkara planteó reglas para operar con números irracionales, una de ellas permite sumar dos números racionales $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{(a+b+2\sqrt{ab})}$; el árabe Al Kashi propone representar racionales, irracionales y valores de razones trigonométricas en forma decimal, siglos XII y XV respectivamente (Sánchez, 2014). Estas posturas dieron lugar a una ruptura con la concepción griega de representar números racionales con razones e irracionales a partir de construcciones geométricas, reforzadas posteriormente por Simón Stevin en el siglo XV, estableciendo una representación única de los números con notación decimal, ya sea exacta o aproximada.

Según Waldegg (1996), la representación decimal de los números por parte de Stevin permite resaltar lo siguiente:

• El cambio que representa la definición de número de Stevin respecto a la definición de número en la matemática teórica griega.

• La dificultad que entraña una definición de número que se asocia tanto a cantidades continuas como a discretas.

• La ampliación del dominio numérico que resulta del nuevo concepto de número.

• La forma en que las operaciones aritméticas intervienen en la evolución del concepto. (p.6).

El progreso del álgebra al pasar de la retórica a la sincopada y de ahí al álgebra simbólica y de polinomios, junto con el descubrimiento de otros números irracionales como el número e obtenido a partir de la invención de los logaritmos por John Napier, amplió el universo de los números irracionales. Napier con los logaritmos no buscaba números irracionales, su propósito fue simplificar las tediosas operaciones aritméticas con números de muchas cifras, así lo deja expresado en el prefacio de su obra Mirifici Logarithmorun Canonis Descriptio (Descripción de la maravillosa tabla de logaritmos) con las siguientes palabras:

Así, todos los métodos asociados a las multiplicaciones y divisiones de números y a las largas y arduas extracciones de las raíces cuadradas y cúbicas son todos rechazados en la obra, y su lugar lo ocupan otros números en su sustitución, los cuales hacen las mismas operaciones rechazadas a través de sumas, restas y la división entre dos o tres únicamente. Como realmente el secreto se hace mejor si es común a todos, tal como pasa con las cosas buenas, es una tarea agradable establecer el método para el uso público de todos los matemáticos. (1614).

Habiendo aparecido el número e y los logaritmos irracionales caracterizados por tener una representación decimal con infinito número de cifras decimales sin repetirse, claramente quedaba establecida una clasificación de los números irracionales, los que resultaban de las raíces no exactas y los que resultaban de hechos específicos, de los logaritmos, las razones trigonométricas, la función exponencial o podían construirse bajo ciertos criterios, como lo hizo Joseph Liouville en 1844 estableciendo el número irracional L= 0.11001000000000000000000010000… donde los unos aparecen en los lugares 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, …, es decir, en las cifras decimales de orden n!

Fueron entonces clasificados los números en algebraicos y trascendentes. Los números que son soluciones de ecuaciones polinómicas de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdot\cdot\cdot + a_nx^n = 0$ se llaman algebraicos, los que no son algebraicos se llaman trascendentes. La familia de los algebraicos comprende enteros, racionales y una parte de los irracionales; la otra familia, los trascendentes, tiene solamente esos irracionales que no son raíces.

A finales del siglo XIX se acrecienta la preocupación por formalizar el concepto de número, la aceptación de racionales e irracionales era como aceptar dos mundos diferentes, por lo tanto, se buscaba un concepto amplio que incluyera a ambos. Varias fueron las contribuciones en la solución del problema planteado por parte de Gottlob Frege, Giuseppe Peano, Charles Méray, Karl Weierstrass, George Cantor, Bertrand Russell y Richard Dedekind entre otros. Dedekind y Cantor construyen un sistema completo de números donde racionales e irracionales se fundían en un único sistema llamado números reales. Cantor presenta una construcción de los números reales mediante el estudio de sucesiones regulares, Dedekind en 1872 presenta el trabajo "Continuity and Irrational Numbers" (Continuidad y números irracionales) donde define los reales mediante cortaduras.

Dedekind (1872) explica el concepto de cortadura con las siguientes palabras:

Si se reparten todos los puntos de la recta en dos clases, tales que cada punto de la primera clase está situado a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un único punto que determina esta partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos partes. (p.6).

Dedekind construye los números reales pasando de la discontinuidad de los racionales al dominio continuo de los reales, idea que ya había considerado Bernard Bolzano con el teorema del valor intermedio, para ello llena los espacios que quedan en una recta cuando sobre ella se ubican los números racionales, la correspondencia de los puntos de una recta con los números racionales deja ciertas lagunas; "la anterior comparación del dominio R de los números racionales con una recta ha llevado al reconocimiento de la lacunariedad, incompletud y discontinuidad en el primero, mientras que atribuimos a la recta completud, ausencia de lagunas, o sea continuidad" (Dedekind, 1872, p.6).

La importancia epistemológica en la construcción de los irracionales propuesta por Dedekind se debe a que no llena arbitrariamente los huecos, sino que muestra que en cada uno de ellos el lugar es ocupado por un número irracional, no se trata de completar un conjunto agregando elementos caprichosamente, se trata de dar a los irracionales la categoría de números, eliminando cualquier duda sobre su naturaleza, inclusive la existencia mediante representación con fracciones continuas.

4. IRRACIONALES EN EL CURRÍCULO DE PRIMARIA

Tradicionalmente el currículo de matemática en educación primaria se orienta hacia el conocimiento de los números enteros y racionales no negativos. Representar, contar y realizar operaciones aritméticas con dichos números es el objetivo principal, las operaciones constituyen la base para la resolución de problemas y la extensión de los números a conjuntos más amplios.

Recepción: 31/10/2022 Aceptación: 15/03/2023

El establecimiento del currículo de matemática para primaria es procedente de la constitución política de 1886 y la legislación derivada de ella, el decreto 491 de 1904 reglamentario de la ley 89 de 1903 consideraba para la enseñanza de la aritmética el tema "Sistema de numeración y las cuatro operaciones de enteros y decimales con números cualesquiera, fracciones comunes, pesas y medidas antiguas; ejercicios y problemas diversos. Cálculo mental." La ley 56 de 1927 establece cuatro años, posteriormente el decreto 3468 de 1950 extiende la duración de la primaria a cinco años para las escuelas urbanas, oficializando el plan de estudios o currículo para la educación primaria dándose hasta ese momento prioridad a los contenidos; los decretos fijaban el currículo general y por consiguiente el del área de matemática, así se contempla en el decreto 045 de 1962, con el cual se establece el Ciclo Básico de Educación Media, se determina el Plan de Estudios para el Bachillerato, y se fijan Calendario y Normas para evaluar el trabajo escolar. Por otra parte, la educación primaria se clasificaba en rural y urbana, pero a partir de 1963 el currículo se orienta con el decreto 1710, cambiándose el estilo de presentación basado en contenidos, por objetivos específicos e indicadores de evaluación, que en la práctica venían a ser la misma cosa.

En el nivel de primaria los alumnos necesitan partir de situaciones concretas que sean conocidas por ellos, esto les permitirá acercarse de manera a los conceptos matemáticos que posteriormente deben ser abstraídos para llegar a su formalización. La primera aproximación a los números irracionales comienza con los números decimales en cuarto de primaria en calidad de fracciones decimales, es decir, fracciones cuyo denominador es una potencia de diez, lo cual inmediatamente conecta con el tema de potenciación. Ejemplos de fracciones decimales son 57/100, 3498/1000, 4/5 = 80/100, etc. Las fracciones decimales, llamadas antiguamente quebrados decimales (Bruño, s.f.), pueden representarse con la notación finita de punto decimal; es decir, son fracciones con un número finito de cifras decimales; por lo tanto, los números decimales son las fracciones decimales.

Los Derechos Básicos de Aprendizaje actuales emitidos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (Mineducación) hacen referencia a los decimales como otra forma de representación de números racionales, así queda expreso en las evidencias de aprendizaje (Mineducación, 2017):

- o Establece relaciones mayor que, menor que, igual que y relaciones multiplicativas entre números racionales en sus formas de fracción o decimal.
- o Construye y utiliza representaciones pictóricas para
- o comparar números racionales (como fracción o decimales).
- o Establece, justifica y utiliza criterios para comparar fracciones y decimales.
- o Construye y compara expresiones numéricas que contienen decimales y fracciones. (p.31).

"Utiliza y justifica algoritmos estandarizados y no estandarizados para realizar operaciones aditivas con representaciones decimales provenientes de fraccionarios cuyas expresiones tienen denominador 10, 100, etc." (Mineducación, 2017, p.8); "construye y compara expresiones numéricas que contienen decimales y fracciones" (ibid., p.9). Siguiendo las acciones propuestas, se llaman números decimales a los racionales para los cuales se puede encontrar una fracción decimal representante.

Por otra parte, la aproximación a los números irracionales se muestra mediante la representación decimal de los números reales, como el caso del número pi que aparece en los cálculos de la longitud de la circunferencia y el área del círculo en el programa de quinto elemental, y cuyo valor se aproxima a 3.14 o 3.1416, aproximación que oculta su naturaleza de ser irracional al convertirlo en un número decimal. Aunque los números reales en primaria no se definen formalmente, se deja entrever que los números en general tienen una representación decimal, lo cual no debe confundirse con el concepto de número decimal.

En la enseñanza primaria los números irracionales se encubren como números decimales, ya que el paso de los números racionales a los irracionales o reales "requiere del uso y comprensión de diferentes tipos de representaciones numéricas, sobre todo, las relativas a los números irracionales, tanto por medio de decimales infinitos como de símbolos algebraicos (Mineducación, 2006, p.60). Raíces no exactas y el número pi se aproximan mediante decimales con un número finito de cifras después del punto decimal; algo similar sucede con las fracciones que conllevan a una representación decimal con cifras infinitas siendo utilizadas en forma finita, por ejemplo, 4/3 = 1.33333…. se manipula con 1.3, 1.33, etc.

En el nivel de enseñanza primaria todos los números se componen de una parte entera y una parte decimal, el punto o antigua coma decimal muestra el límite entre la parte entera que está hacia la izquierda del punto, y la parte decimal que está a la derecha del punto.

Para un número, cada cifra tiene asignado un valor relativo que es el valor de orden de unidad. El valor de un orden de unidad es diez veces el valor del orden de unidad de la cifra inmediata de su derecha, o la décima parte del valor de orden de unidad de la cifra inmediata de su izquierda. (Gómez, 2010, p.98)

Recepción: 31/10/2022 *Aceptación: 15/03/2023*

Cuando el número es entero no se escribe la parte decimal, 418 no se representa por 418.0; si se trata de una fracción, esta conduce a un decimal con finitas cifras decimales o infinitas cifras decimales; en cualquier caso, se utiliza solamente la representación con un número finito de cifras decimales, de allí que los pocos números irracionales que se estudian están integrados al concepto de representación decimal.
De acuerdo con el principio de continuidad, los números irracionales son tratados en primaria como números decimales; realmente no se establece una diferencia marcada entre estos dos tipos de números, ya que el propósito principal según los derechos básicos de aprendizaje es el cálculo de operaciones con números decimales, transferible a la resolución de problemas acordes con el nivel cognitivo de los estudiantes, particularmente en el grado quinto.
Para el alumno de primaria el concepto de número irracional es complicado de entender ya que es necesario tener primero claridad sobre los números racionales; las diferentes maneras de llegar al concepto de irracional necesitan de conceptos aritméticos y geométricos, que por falta de continuidad y el nivel cognitivo no se tienen; por esa razón, es importante la comprensión de los números en su representación decimal de acuerdo con el valor posicional de las cifras, ya que estos aspectos se originan al extender la idea del valor relativo del sistema de numeración posicional de base diez en el sentido opuesto al de los números naturales (Gómez, 2010).

5. IRRACIONALES EN EL CURRÍCULO DE SECUNDARIA

Siguiendo la ruta normativa, el currículo de secundaria o bachillerato, hoy en día comprendiendo parte del ciclo básico y el de media con los grados de sexto a undécimo se rigió desde mediados del siglo XX por los decretos 2550 de 1951, 045 de 1962, 080 de 1974 y 1002 de 1984. La ley General de la Educación o ley 115 de 1994 trajo consigo algunos cambios significativos de carácter pedagógico en el currículo de enseñanza básica y media, y por tanto en los planes de estudio, expresados en el Proyecto Educativo Institucional.
La renovación curricular, por así decirlo, resultante a partir de la Ley General de la Educación, trajo la elaboración de documentos que determinaron el currículo de matemática: los lineamientos curriculares para el área de matemáticas 1998, los estándares curriculares de 2006 y los derechos básicos de aprendizaje de 2017. En estos escritos se determina el rumbo de los conocimientos que debe adquirir el estudiante en función de los procesos llamados pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistema de medidas, pensamiento aleatorio y sistema de datos y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.
Hasta 1962 el plan de estudios comprendía aritmética y geometría en los dos primeros años de secundaria, álgebra y geometría en los dos cursos siguientes, trigonometría y geometría analítica en el penúltimo grado y en el último no había curso de matemática. A partir de 1962 se introdujo cálculo o análisis matemático en el último grado, conservándose hasta ahora en la práctica la misma distribución de cursos, con algunas pequeñas modificaciones al considerarse el pensamiento aleatorio.
En el primer grado de secundaria o sexto actual, el currículo de matemática, entre otras aspiraciones apunta a dos propósitos esenciales: presentar el sistema de los números enteros y afianzar el manejo de los números racionales y sus operaciones en su representación decimal. Los estándares curriculares establecen que en el grado sexto los estudiantes deben distinguir entre números racionales e irracionales proponiendo ejemplos en cada caso, de esta manera dichos números se diferencian por su representación decimal a través de la siguiente clasificación:

$$\text{Representación decimal} \begin{cases} \text{Exacta} \\ \text{No exacta} \begin{cases} \text{Periódica} \\ \text{No periódica} \end{cases} \end{cases}$$

(irracionales)

Fuente: Elaboración propia

En este momento del currículo, y el que le sigue en el grado séptimo, los números irracionales se identifican por la no periodicidad de las cifras decimales, la concepción de irracionalidad es práctica, de ninguna manera se muestra relación alguna con la inconmensurabilidad. La determinación de los números racionales en el grado séptimo por su representación como fracción, permite otro punto de vista para la comprensión de los números irracionales, estos números no tienen una fracción equivalente que los represente; no obstante, estos números surgen con la necesidad de realizar cálculos como la raíz cuadrada de un racional en forma de fraccionario y resolver problemas donde intervienen la longitud de la circunferencia o el área del círculo; sin embargo, tanto racionales como irracionales se representan con notación fraccionaria y decimal, por ejemplo. El pensamiento numérico en este grado se centra en el estudio de los números racionales como campo ordenado, los irracionales marcan la diferencia en la representación decimal cuando se trata calcular raíces no exactas de números fraccionarios.
La definición de irracional en enseñanza media es dialéctica, se es número irracional si no se puede representar como fracción o si su representación decimal es infinita no periódica, así lo muestran algunos textos, "un número irracional es cualquier número que se representa por un decimal no periódico" (Eicholz et al, 1972, p.325); "a las expresiones decimales que no son representación de números racionales se les llama números irracionales. A los puntos de la recta numérica que no corresponden a un número racional les corresponde en consecuencia un número irracional" (Wills, Guarín, Londoño y Gómez, 1976, p.83).

Textos más antiguos (Bruño, s.f.), acuden al origen histórico de los números irracionales como inconmensurables en los siguientes términos:

Llámese conmensurable a una cantidad cuando tiene una medida común con la unidad.

Llámese inconmensurable la cantidad que no tiene medida común con la unidad.

Ni los números enteros ni los quebrados pueden ser cantidades inconmensurables puesto que tienen medida común con la unidad. (p.178).

El currículo de los grados octavo y noveno tiene un fuerte componente de los pensamientos algebraico y variacional. La introducción del álgebra y las funciones implica la introducción de otros números irracionales los cuales van siendo mostrados de acuerdo con las necesidades de hacerlos visibles, algunos se generan mediante construcciones geométricas, otros son construidos siguiendo el formalismo de Liouville y aparecen aquellos que obedecen a problemas específicos como el número de oro y el número *e*.

Con los números irracionales añadidos a los racionales se forman los números reales, así se expresa en un texto oficial auspiciado por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia:

El sistema numérico se ha ido enriqueciendo con nuevos números. Ya se tienen los naturales $\mathbb{N}$*, los enteros* $\mathbb{Z}$ *y los racionales* $\mathbb{Q}$*. Pero la historia no termina aquí, como ya viste, nuevos problemas llevan a la construcción de otros números, como en el caso de expresar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 unidad, cuya longitud es unidades. O también la relación que existe entre la longitud de una circunferencia y su diámetro cuyo valor es* π*. Así aparecen los llamados números irracionales.* (Saavedra y Medina, 2012: 18).

Teniendo ya los irracionales se llena la recta numérica, es decir, se garantiza una correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y los números reales. A partir de esta compleción se proponen dos esquemas: En el primero se consideran los reales según su representación decimal a partir de tres conjuntos diferentes: números enteros, números racionales y números irracionales.

Los números enteros no poseen cifras decimales, o todas las cifras son cero después del punto decimal; los racionales se presentan como el cociente de dos números enteros teniendo un número finito de cifras decimales en cuyo caso son números decimales propiamente dicho, o un número infinito de cifras decimales después del punto, periódicas a partir de determinada posición decimal; queda entonces la representación con infinitas cifras decimales no periódicas después del punto decimal, correspondiendo a números irracionales.

Se consideran los números en términos de conjuntos de acuerdo con su representación o no en forma de fracción; los que tienen dicha representación correspondiendo a la relación de dos segmentos conmensurables son números racionales (Pommer, 2013), los que no se pueden representar como fracción son números irracionales;

los números racionales (decimales periódicos) y los números irracionales (decimales no periódicos) forman un conjunto de números llamados números reales. Como todo decimal (sea o no periódico) determina un punto en la recta numérica y como todo punto en la recta numérica está asociado a un decimal, decimos que la recta numérica está completa y la llamaremos la recta numérica real (Eicholz et al, 1972, p.327).

Bajo esta apreciación, los reales se clasifican en racionales e irracionales, los racionales cobijan las fracciones con denominador la unidad u otro número, donde los números enteros son fracciones del primer tipo. El álgebra Elemental de Baldor (s.f.), cuya primera edición aparece en 1941 es el texto más utilizado en los años sesenta y setenta en Latinoamérica, este libro determinó el currículo de matemática de los grados octavo y noveno durante tres décadas aproximadamente, en popularidad es el sucesor del libro de Bruño, define los irracionales basándose en un comentario histórico:

Euclides (300 A.C.) estudió en el libro X de sus Elementos, ciertas magnitudes que al ser medidas no encontramos ningún número entero ni fraccionario que las exprese. Estas magnitudes se llaman inconmensurables, y los números que se originan al medir tales magnitudes se llaman irracionales.

Definimos el número racional como aquel número que puede expresarse como el cociente de dos enteros. Y el número irracional como aquel número real que no puede expresarse como el cociente de dos enteros.

Llamamos números reales al conjunto de los racionales e irracionales. (pp.29-30).

Los números reales se clasifican en racionales e irracionales. Los racionales contienen los números enteros y los fraccionarios, los enteros contienen los naturales, el cero y los enteros negativos.

El concepto de cortadura de Dedekind se encubre en el libro de Baldor como *Axioma de continuidad*, para Baldor (*ibid*: p.33), los espacios dejados por los racionales son llenados con los irracionales.

Si tenemos dos conjuntos de números reales A y B, de modo que todo número de A es menor que cualquier número de B, existirá siempre un número real c con el que se verifique $a \leq c \leq b$*, en que a es un número que está dentro del conjunto A, y* b *es un número que está dentro del conjunto B.*

La existencia de los números irracionales queda formalizada en el grado séptimo con el allanamiento del pensamiento algebraico, así se registra en los derechos básicos de aprendizaje: "Reconoce la existencia de los números irracionales como números no racionales y los describe de acuerdo con sus características y propiedades" (Mineducación, 2017. p.59). Los irracionales son relacionados con aspectos aritméticos, geométricos y de representación, este hecho es manifestado en las evidencias de aprendizaje:

- *Utiliza procedimientos geométricos o aritméticos para construir algunos números irracionales y los ubica en la recta numérica.*
- *Justificar procedimientos con los cuales se representa geométricamente números racionales y números reales.*
- *Construye varias representaciones (geométrica, decimales o no decimales) de un mismo número racional o irracional.* (Ídem).

En los estándares curriculares para el grado séptimo el pensamiento numérico y los sistemas numéricos hacen énfasis en el concepto de irracional y su posterior aplicación en temas geométricos, los términos en que se hace referencia expresan:

• Reconoce las propiedades de los números irracionales.

• Comprende el significado y las propiedades de la recta real.

• Deduce y aplica las fórmulas para el área de superficie y el volumen de conos, prismas y pirámides. (Mineducación, 2006: pp.32-33).

El trabajo con números irracionales se intensifica en el grado noveno, el estudio de las funciones cuadrática, logarítmica y exponencial permite la introducción de otros números irracionales especiales como el número de oro y el número *e*; por otra parte, la conexión con la geometría a través del teorema de Pitágoras y el cálculo de volúmenes del cono circular recto, el cilindro circular recto y la esfera, le da un significado al número pi que es más inteligible al estudiante.

A partir del grado séptimo los números quedan reunidos en un solo sistema numérico, el sistema de los números reales con la ampliación del conjunto de los racionales. La ampliación de los racionales a los irracionales se justifica en el currículo mediante dos razones; la primera es de tipo histórico, los irracionales van apareciendo a lo largo del desarrollo de la matemática; la segunda es de tipo instrumental, se da debido al hecho de que hay una operación no posible en los racionales, así lo manifiesta Vargas (2003) al estudiar el continuo matemático en cuatro textos de octavo grado.

De acuerdo con las mallas de aprendizaje del Ministerio de Educación Nacional (2018), en los grados de enseñanza media el propósito es fundamentar el trabajo con números reales en sus diferentes representaciones, considerando que la aproximación de irracionales mediante números decimales genera un error de aproximación, lo cual se justifica por el continuo matemático y las propiedades de densidad de racionales, irracionales y reales considerados como totalidad. Por tal razón los estándares básicos de competencias del Ministerio de Educación Nacional en el componente de pensamiento numérico establecen:

1. *Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales.*
2. *Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.*
3. *Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.*

En relación con lo antes expuesto para el currículo de matemática de educación secundaria, el concepto de irracional se presenta integrado a lo geométrico y lo algebraico, estos números van surgiendo de acuerdo con ciertas necesidades que se van mostrando en diferentes temas, la relación con los objetivos de aprendizaje manifiestos a través de estándares curriculares, derechos de aprendizaje y mallas curriculares es evidente, existe cierta coherencia entre el tema, la documentación de soporte para la enseñanza y textos escolares; no obstante, la presentación del tema es discontinua, el carácter progresivo del tema da saltos y la profundización sobre el tema es superficial puesto que el concepto unificador del sistema numérico de los reales prácticamente se justifica de manera informal en el último grado de enseñanza media.

6. CONCLUSIONES

La noción de número irracional va apareciendo a lo largo del currículo de matemática de manera accidental, no hay una construcción formal, sino que los números emergen de las necesidades al resolver ciertos tipos de problemas que los involucran. Su presentación se da a partir de prácticas relacionadas con aspectos geométricos y algebraicos, también como resultado de la realización de la operación de extraer la raíz no exacta de un número entero o fraccionario.

La presentación de los números irracionales en el currículo es intermitente, en el nivel de primaria son ciertos objetos útiles para poder resolver problemas elementales de tipo geométrico relacionados con el la circunferencia y el círculo, pero su manejo implica considerarlos dentro de los números decimales; en secundaria, se prefiere definirlos directamente como aquellos números que no pueden representarse como una fracción o que poseen infinitas cifras decimales no periódicas, sin plantear alguna actividad que conduzca al estudiante a construirlos; en esa misma dirección actúan los libros de texto, cuya preocupación es atender a los estándares curriculares en vez de procurar su fundamentación.

En la práctica los irracionales son tomados como aproximaciones de números decimales ya que es imposible manejar un número irracional en su forma completa, su operatividad en forma de radical o expresión conteniendo logaritmos, exponenciales o expresiones geométricas es muy reducida y esta representación se convierte en un obstáculo cuando se trata de hacer cómputos con dichos números.

Finalmente, si bien el tema se integra a lineamientos curriculares, estándares curriculares y derechos básicos de aprendizaje, hace falta más continuidad y profundidad para que el hilo conductor no se pierda como ocurre en los dos primeros grados de secundaria donde se enfatiza en números enteros y racionales. Al presentar los números reales se ignora su origen a partir de fracciones continuas y su clasificación en algebraicos y trascendentes; a cambio, se tiene la impresión de que dicho sistema se conformara con dos partes aparentemente ajenas: racionales e irracionales.

7. REFERENCIAS

Baldor, A. (s.f.). *Álgebra Elemental*. México: Publicaciones Cultural.

Becerra, J. (2017). *Plan de área matemáticas de la institución educativa Antonio Roldan Betancur.*

Recuperado de: https://ieducar.edu.co/wp-content/uploads/2017/07/Matematica.pdf
Bolaños, G. y Molina, Z. (2006). *Introducción al currículo*. San José, Costa Rica: Editorial Universidad Estatal a Distancia.
Bruño, G. M. (s.f.). *Elementos de aritmética con algunas nociones de álgebra*. 14ª. Ed. París: Procuraduría General.
Coll, C. (1994), *Psicología y Currículum. Una aproximación psicopedagógica a la elaboración del currículum escolar*. Barcelona: Paidós.
Congreso de Colombia. (1904). Decreto 491 del 3 de junio de 1904. Diario Oficial número 12122 jueves 14 de julio de 1904.
Dedekind, R. (1872). Continuidad y números irracionales. Traducción y comentarios por J. Bares y J. Climent. Recuperado de https://www.uv.es/~jkliment/Documentos/Dedekind.pc.pdf
Eicholz, R., O´Daffer, P., Brumfiel, C., Shanks, M. & Fleenor, C. (1972), *Serie Matemática Moderna. Segundo Curso*, Bogotá, Fondo Educativo Interamericano.
Kemmis, S. (1988), *El currículo: más allá de la teoría de la reproducción*. Madrid: Ediciones Morata.
Creswell, J. (1998), *Qualitative inquiri and reaserch design. Chossing among five traditions. 3rd.ed.* Thousand Oaks CA: Sage.
Gómez, B. (2010). Concepciones de los números decimales, *Revista de Investigación en Educación*, 8, 97-107.
Jiménez, D. (2006). ¿Qué era un irracional para un matemático griego antiguo*? Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 13(1), 87-103.
Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencia en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá: MEN.
Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Bogotá: Panamericana Formas E Impresos S.A.
Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Mallas de aprendizaje. Grado 4°*. Bogotá: MEN.
Ministerio de Educación Nacional (2018). *Mallas de Aprendizaje. Grado 10°.* Bogotá:
MEN.
Napier, J. (1614). *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Edinburgh: Andrew Hart.
Pommer, W. M. (2013). *Irrational Numbers: A constructive approach at Elementary and High School*. São Paulo: Author´s Edition.
Rodríguez, D., Jiménez, M. & Rodríguez, J. (2015). *Fuentes y Fundamentos del Currículo*. Panamá: Universidad Especializada de las Américas.
Saavedra, M. & Medina, D. (2012). *Grado 9 ° Matemáticas. Secundaria activa*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
Sánchez, C. (2014). Paseo por el universo de las irracionalidades aritméticas*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 9(12), 87-107.
Vargas, J. (2003). La construcción de los irracionales de Dedekind como instrumento en un análisis de textos de octavo grado. *Tecné, episteme y didaxis*, 14, 4-18. https://doi.org/10.17227/ted.num14-5567
Waldegg, G. (1996). La contribución de Simon Stevin a la construcción del concepto de número. *Educación Matemática*, 8(2), 5-17.
Wills, D., Guarín, H., Londoño, N. & Gómez, R. (1976). *Matemática Moderna Estructurada 3*. Bogotá: Norma.

Alfonso Segundo Gómez Mulett

Profesor Titular Programa de Matemáticas Universidad de Cartagena, Cartagena Colombia. Licenciado en Educación área Matemáticas y Física U Pontificia Bolivariana, Especialista en Pedagogía para el Aprendizaje UNAD, Especialista en Sistemas de Información U Eafit, Magister en Matemáticas Aplicadas U Eafit, Doctor en Educación Rudecolombia Universidad de Cartagena.