REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

FUNCIONAMIENTO DE GESTOS DIDÁCTICOS EN UN AULA DE MATEMÁTICA DE NIVEL UNIVERSITARIO DURANTE LA PANDEMIA

Diana P. Salgado[1,2]

dsalgado@uns.edu.ar

[1]Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur (UNS), Av. Alem 1253, Bahía Blanca, Argentina.
[2]Núcleo de Investigación en Enseñanza de las Ciencias y la Tecnología (NIECYT), Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA), Tandil, Argentina.

Resumen

Este trabajo presenta un análisis del funcionamiento de gestos didácticos en un curso de matemática de nivel universitario en las carreras Contador Público y Licenciatura en Administración de Empresas. Las clases, llevadas a cabo en un entorno no presencial, se caracterizan por fomentar el estudio y la investigación propios de la Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo (PICM) propuestos por la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Se detallan indicadores del funcionamiento de ciertos gestos didácticos que podrían asociarse en parte a las dialécticas, gestos didácticos esenciales en la puesta en marcha de esta nueva pedagogía que busca romper con el paradigma tradicional de enseñanza. Los estudiantes manifiestan, entre otros, gestos del estudio e investigación, de la difusión y recepción y de la lectura y escritura que conducen al encuentro con el saber matemático.
Palabras clave: dialécticas, enseñanza por investigación, matemática, universidad.

Functioning of didactic gestures in a university-level mathematics course during the pandemic

Abstract

This article presents a didactic-gestures functioning analysis in a mathematic course at university level in Public Account and Bachelor's degree in Enterprises Administration careers. The classes were developed in a non-presential environment. They are characterized by encouraging the study and the investigation typical of the Pedagogy of the Investigation and Questioning the World (PIQW) proposed by the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). Indicators of certain didactic gestures functioning that could be associated in part to the dialectics, essential didactical gestures in the implementation of this new pedagogy that tries to break with the traditional paradigm of teaching, are detailed. The students show, between others, study and investigation, diffusion and reception gestures and that of the reading and writing, that leads to meet with mathematical knowledge.
Keywords: dialectics, teaching by investigation, mathematic, university.

Fonctionnement de gestes didactiques dans une classe de mathématiques de niveau universitaire pendant la pandémie

Résumé

Ce travail present un analisis du fonctionnement des gestes didactiques dans un cours de mathematique au niveau universitaire pour les carrières Comptabilité Publique et Diplôme en Administration des Entreprises. Les cours se sont developpée dans un environnement non présentiele. Ils se caracterisent par promouvoir des études et recherche, propre de la Pédagogie de la Recherche et de la Questionnement du Monde proposé par la Theorie Anthropologique du Didactique (TAD). Les indicateurs du fonctionnement de certains gestes didactiques sont détaillés. Ces actions pourraient

être associés en partie aux dialectiques, gestes didactiques essentiels dans la mise en œuvre de cette nouvelle pédagogie qui cherche à rompre avec le paradigme traditionnel de l'enseignement. Les étudiants manifestent, entre autres, des gestes d'étude et de la recherche, de la difussion et réception et cet de lecture et d'écriture conduisant à la rencontre avec le savoir mathématique.
Mots clés: dialectique, enseignement par recherche, mathematique, université.

1. INTRODUCCIÓN

Durante los años 2020 y 2021, profesores e investigadores de todos los niveles educativos y de diversas disciplinas, en particular de matemática, se han visto involucrados en cambios sustanciales a la hora de relacionarse con sus alumnos, debiendo adoptar encuentros no presenciales, por ejemplo, de forma sincrónica a través de videoconferencias. Estos cambios y la preocupación de todo el sector docente tuvieron que ver con: determinar la plataforma adecuada para utilizarla como aula virtual y comunicarse con los estudiantes, diseñar estrategias de enseñanza y aprendizaje, seleccionar el material educativo para compartir en el aula virtual, captar la atención de los estudiantes para evitar su deserción y definir una adecuada forma de evaluación on-line, por citar algunos ejemplos.

Diversas publicaciones refieren a estas temáticas (Cantoral, Ríos Jarquín, Reyes Gasperini, Cantoral Uriza, Barrios, Fallas Soto & Bonilla Solano, 2020; Failache, Katzkowicz & Machado, 2020; García-Mejía & García-Vera, 2020; Gómez, 2021; Martínez, Serna & Arrubla, 2020; Pincheira Hauck & Vásquez Ortiz, 2021; Rizzo, 2021; Scott, 2021; Silva, Lima, Alencar, Silva & Pinheiro, 2021) pero son escasas las investigaciones en el contexto de la educación universitaria (Lescano, Puy & Puy, 2021) y menos aún en torno a las acciones que los estudiantes ponen en acto al momento de involucrarse con el saber matemático en un ambiente no presencial mediado por la tecnología.

Failache, Katzkowicz y Machado (2020) advierten que las medidas de distanciamiento social adoptadas a raíz de la pandemia generaron la necesidad de pensar estrategias de enseñanza-aprendizaje para aquellas aulas que no eran a distancia. Los autores remarcan la importancia de no acrecentar las desigualdades existentes en el sistema educativo y advierten que en el nivel medio existen problemas de acceso, permanencia y egreso.

Por su parte, Gómez (2021) pone énfasis en el factor determinante de las familias en la educación de los hijos, haciendo hincapié en los alcances y limitaciones de cada familia. Concluye que la preparación académica de los padres y las expectativas de la familia en cuanto al aprendizaje de sus hijos ha sido determinante en los resultados obtenidos.

García y García (2020) se enfoca en la búsqueda de alternativas para mejorar el rendimiento de los estudiantes en matemáticas y propone la metodología STEAM (Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics) para potenciar los procesos de enseñanza y aprendizaje en tiempos de pandemia.

Scott (2021) realiza una breve descripción del sistema educativo en los Estados Unidos y cómo la educación matemática debió enfrentar la pandemia, cuáles son algunos de los recursos en línea disponible y cómo ha impactado en los estudiantes.

En el ambiente universitario, Lescano, Puy y Puy, (2021) se enfocan en cómo la pandemia afectó a los sistemas educativos y forzó al cierre de muchos de ellos. Destacan la necesidad de rediseñar los materiales educativos para garantizar el desarrollo de las competencias requeridas en los planes curriculares, así se propusieron prácticas utilizando herramientas digitales y se consideraron distintos tipos de evaluaciones. Describe las acciones y herramientas aplicadas por cátedras de matemática en carreras de ingeniería.

Con el objeto de identificar y analizar los gestos didácticos que los estudiantes ponen en juego, y continuando con la línea de investigación iniciada años atrás (Salgado, Otero & Parra, 2017; Salgado & Otero, 2020), este trabajo muestra resultados de una experiencia realizada en un curso de matemática de nivel universitario en modalidad no presencial, en el cual se promueve la investigación y el cuestionamiento y simultáneamente intenta romper con la pedagogía tradicional que habita en la universidad de referencia (Salgado, 2019). Las sesiones se desarrollaron siguiendo una modalidad intermedia entre lo que implica estudio e investigación, y la conocida fórmula "2 horas de teoría y luego 2 horas de práctica", en la que el profesor explica y seguidamente los estudiantes resuelven los ejercicios.

La observación y análisis se realizan desde el punto de vista de los gestos didácticos que entran en funcionamiento. Así, se utilizan a estos gestos como instrumento de análisis tal como refieren algunas investigaciones (Gazzola, Otero & Llanos, 2019, 2020; Parra & Otero, 2017, 2018; Salgado, 2019; Salgado & Otero, 2020; Salgado, Otero & Parra, 2017, 2018).

Si bien en esta investigación se muestran resultados de una experiencia desarrollada con una estrategia diferente, no habitual en la institución de referencia, el objetivo principal y general de este trabajo es visibilizar y valorizar el trabajo de los estudiantes en un contexto no presencial.

2. MARCO TEÓRICO

Este trabajo adopta a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) como marco de referencia (Chevallard, 2013). La TAD propone ingresar en la Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo (PICM) para intentar romper con la pedagogía tradicional en la que el profesor explica, es el único habilitado para difundir el saber, el estudiante toma nota y raramente cuestiona el saber, el profesor habla y el estudiante escucha, en síntesis, el profesor exhibe los saberes como si fueran obras de arte y el estudiante "visita" a esas obras como si estuviera recorriendo un museo. En contraposición con este modelo de "visita de obras", la TAD promueve la implementación en las aulas de Recorridos de Estudio e Investigación (REI), dispositivos didácticos que construyen el saber partiendo de preguntas (Otero, Fanaro, Corica, Llanos, Sureda & Parra, 2013). En un REI, el profesor es el director del proceso de estudio y se convierte principalmente en un *media* más, en igualdad de valoración con respecto a cualquier otro sistema de información. El REI comienza a partir de una pregunta generatriz, formulada en sentido fuerte. En la búsqueda de respuestas a esta pregunta inicial, surge toda una cadena de nuevas preguntas que delinean el recorrido. Los estudiantes se hacen responsables en la búsqueda de respuestas y en la formulación de nuevas preguntas. Además, el saber posee un alto grado de instrumentalidad, ya que es utilizado para dar respuesta a las cuestiones planteadas.

Un REI efectivamente implementado requiere la gestión de las dialécticas (Chevallard, 2007; Salgado, 2019; Salgado & Otero, 2020). Éstas se describen brevemente a continuación:

D_1: *Dialéctica del estudio e investigación*. Esta hace referencia a investigar en los diferentes sistemas de información disponibles los saberes útiles, funcionales a la pregunta inicial y sus derivadas, y estudiar lo específico de ellos.

D_2: *Dialéctica del individuo y del colectivo*. Ésta se relaciona con el esfuerzo por construir respuestas a las preguntas, la construcción colectiva de las mismas y la valoración de las respuestas obtenidas en lugar de aceptarlas sin cuestionamiento.

D_3: *Dialéctica del análisis (praxeológico y didáctico) y de la síntesis (praxeológica y didáctica).* Todo análisis de un saber dado requiere formular preguntas didácticas relacionadas con la difusión de ese saber: ¿cómo es?, ¿de dónde surge ese saber? Esta dialéctica incluye el análisis a priori del profesor investigador o didacta, de los saberes que podrían estar en juego en el recorrido.

D_4: *Dialéctica del entrar y salir del tema*. El estudio de saberes disponibles puede llevar a "salir del tema" o "del saber" produciendo el encuentro con otros saberes para luego reingresar al tema original.

D_5: *Dialéctica del paracaidista y de las trufas*. En un proceso de estudio se inspeccionan grandes áreas del saber hasta encontrar aquel que es la "pepita de oro" para responder a un problema.

D_6: *Dialéctica de las cajas negras y de las cajas claras*. Se trata de establecer cuáles son los saberes relevantes para responder las preguntas, y cuánto es necesario profundizar en ellos, encontrar el nivel de gris adecuado. Los saberes relevantes serán aclarados, los demás se dejan en la oscuridad.

D_7: *Dialéctica de la lectura y de la escritura.* Se trata de analizar, reescribir, sólo la parte útil de las respuestas encontradas. Estas son analizadas, evaluadas, para luego reescribirlas, desarrollarlas e interpretarlas en relación con el problema.

D_8: *Dialéctica del medio-media*. Ésta se relaciona con la validación del saber. Todo saber es conjetural, debe ser sometido a prueba. La incorporación al medio de cada "media" (sistema de información) depende de un proceso de validación.

D_9: *Dialéctica de la difusión y de la recepción*. Se trata de comunicar y justificar las respuestas obtenidas, convocando a su cuestionamiento para determinar si son o no aceptadas por el resto de la comunidad de estudio.

D_{10}: *Dialéctica de las preguntas y respuestas*. Esta dialéctica se manifiesta toda vez que se generan ciclos de preguntas y respuestas a partir de una cuestión generatriz. La formulación de preguntas y la elaboración de las respuestas pueden explicitarse tanto en forma oral como escrita.

Los resultados que se presentan en este artículo no provienen de la implementación de un REI, sino que surgen del análisis de una experiencia en la cual se intenta iniciar a los estudiantes en la investigación, el cuestionamiento y el trabajo autónomo, no a partir de una pregunta sino de la resolución de problemas. No obstante, el análisis hizo posible detectar el funcionamiento de gestos didácticos, considerándolos como con ciertos rasgos de las dialécticas descriptas anteriormente. En síntesis, el análisis se realiza desde el punto de vista de las dialécticas, pero entendiendo que no se produce el funcionamiento genuino de ellas.

3. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

1. ¿Qué gestos didácticos promueven el estudio y trabajo autónomo de los estudiantes de un curso de matemática de nivel universitario, en un entorno no presencial?
2. ¿Cuáles son los indicadores didáctico-matemáticos de los gestos didácticos detectados en los estudiantes?

4. METODOLOGÍA

Esta investigación es de corte cualitativo y exploratorio y permite analizar el funcionamiento de los gestos didácticos, a la manera de las dialécticas, si bien éstos no se enmarcan dentro de un REI. La experiencia se desarrolló en un curso de la cátedra Matemática IIC de nivel universitario correspondiente al primer año de las carreras Contador Público y Licenciatura en Administración de Empresas de la Universidad Nacional del Sur (UNS), durante los meses de agosto a noviembre de 2021 (segundo cuatrimestre de 2021). Debido a la época de pandemia por todos conocida, los encuentros se llevaron a cabo a través de videoconferencia, plataforma virtual cedida por el Departamento de Matemática de la UNS. La experiencia se realizó en el horario fijado para la cátedra, que corresponde a dos encuentros semanales de 4hs cada uno, con N=153 estudiantes.

4.1. Descripción de la institución y del curso

La institución de referencia es la Universidad Nacional del Sur (UNS), ubicada en la ciudad de Bahía Blanca, provincia de Buenos Aires, Argentina. Esta universidad posee una organización departamental, es decir, exclusivamente el Departamento de Matemática dicta los cursos de matemática para todas las carreras. Tradicionalmente las clases de esta disciplina en la UNS se imparten de manera cuatrimestral, el primer cuatrimestre se desarrolla en los meses de marzo a junio y el segundo, de agosto a noviembre, aproximadamente. Las clases se caracterizan por tener una modalidad "clase de Teoría" y "clase de Práctica", es decir, un espacio de Teoría en el cual la profesora explica y desarrolla los contenidos del plan de estudio, y otro de Práctica, en el que el jefe o asistente y ayudantes dan consultas a los estudiantes para resolver los ejercicios correspondientes a los trabajos prácticos, suponiendo que ya poseen la teoría necesaria para resolverlos. El objetivo es que, con la explicación de la profesora, los estudiantes puedan resolver tales ejercicios. La forma de evaluación es, en general, a través de exámenes parciales. Además, en caso de desaprobar los parciales, existe una instancia de recuperatorio al finalizar el cuatrimestre y un examen final para aprobar la materia en una fecha posterior al cierre del cuatrimestre. Con esto queda claro que las instancias de exámenes son consideradas los únicos momentos de evaluación y por lo tanto las que cobran más importancia tanto para los docentes como para los estudiantes.

La cátedra Matemática IIC figura en el segundo cuatrimestre del primer año del plan preferencial de las carreras Contador Público y Licenciatura en Administración de Empresas. Además, se dicta en el primer cuatrimestre para darle posibilidad a aquellos estudiantes que no van al día con el plan de la carrera o que intentan cursar nuevamente.

En el entorno virtual instalado desde marzo de 2020, la forma de trabajo (organización teoría-práctica) y de evaluación

Recepción:22/10/2021 *Aceptación: 30/05/2022*

(exámenes parciales y finales) no sufrió cambios, salvo que la interacción entre estudiantes y profesor ha sido a través de videoconferencias y el espacio virtual institucional en la plataforma Moodle.

4.2. Diseño del dispositivo didáctico y recolección de registros

Debido a la gran cantidad de estudiantes inscriptos en la cátedra en el segundo cuatrimestre de 2021 y sumado al hecho de que no todos ellos se conectan a las clases por diferentes motivos o, si bien se conectan, no encienden sus cámaras ni sus audios, no fue posible desarrollar un REI. Por otra parte, dado que la inscripción a la cátedra perduró aproximadamente un mes más desde el inicio de las clases, se desconocía el número de estudiantes que realmente iban a participar y eso dificultaba, por ejemplo, la formación de grupos fijos de trabajo. Por lo tanto, se optó por implementar un dispositivo intermedio entre lo que implica estudiar e investigar a partir de una pregunta generatriz y la mera resolución de trabajos prácticos con la previa explicación de la profesora. Así, los estudiantes debieron investigar y estudiar para responder no una pregunta o preguntas sino una serie de problemas o ejercicios, sin la previa explicación de la profesora, estimulando de esta manera el trabajo autónomo.

La modalidad de trabajo adoptada por la cátedra fue la siguiente:

• Los encuentros se realizaron de manera sincrónica a través de videoconferencia, en el aula virtual cedido por el Departamento de Matemática.

• En el primer encuentro, los estudiantes se dividieron en grupos de 4 o 5 integrantes. A medida que continuaba la inscripción a la materia, se iban formando grupos nuevos de trabajo. Los grupos quedaron fijados una vez finalizada la inscripción a la materia.

• En cada sesión en el aula virtual, los grupos y el personal docente (profesora y 5 ayudantes de docencia) se distribuían en salas para comenzar a trabajar. La profesora recorría esas salas para inspeccionar el trabajo de los estudiantes. En oportunidades, se regresaba a la sala principal para discutir sobre alguna cuestión general.

• Los estudiantes resolvieron los trabajos prácticos (TP) y entregaron sus resoluciones (en forma grupal) en las fechas estipuladas. Cada resolución fue subida en una Tarea habilitada para tal fin en el aula virtual en Moodle asignada para la cátedra.

• Los cinco trabajos prácticos involucraban los saberes que se detallan en la Tabla 1:

TP	Saberes a encontrar o reencontrar
1	Sucesiones, series, interés simple y compuesto
2	Matrices, sistemas de ecuaciones, determinantes
3	Funciones, curvas de nivel
4	Derivadas parciales y aplicaciones, derivada direccional, incrementos, elasticidad
5	Extremos libres y condicionados. Aplicaciones

Tabla 1: Saberes involucrados en los trabajos prácticos

• Los estudiantes debieron investigar y estudiar lo necesario y útil para resolver los trabajos prácticos. Para ello podían consultar: al personal docente (profesora, asistente y/o ayudantes), el material teórico de la cátedra (disponible en Moodle), Internet, la biblioteca digital disponible en Moodle o Biblioteca Central de la UNS, etc. Se sugirió que en cada trabajo se detallara la bibliografía utilizada.

• La resolución de los ejercicios de los TP debió editarse en un procesador de textos, convertirse en un único pdf y subirse a la Tarea correspondiente.

• Previamente a la entrega, cada grupo compartió en la nube la edición de los trabajos para que profesora y ayudantes puedan hacer un mejor seguimiento del desempeño de los grupos y estudiantes.

• Para la realización de cálculos o gráficos, se permitió la utilización de algún software, por ejemplo, ®GeoGebra.

• Se fijaron fechas estimadas de entrega de los TP, los que fueron calificados con Aprobado (A), Desaprobado (D) o Rehacer, según la configuración existente en la Tarea y elegida como criterio de evaluación.

• Para cada TP se informó oportunamente si era obligatorio presentar la resolución de todos los ejercicios o de solamente algunos de ellos.

• Modalidad de cursado: Para aprobar el cursado de la materia se exigió la aprobación de los TP y la participación activa en clase. En caso de no aprobar o no entregar alguno(s) de los TP o no participar activamente en clase, hubo una instancia de evaluación escrita y/u oral presencial al finalizar el cuatrimestre, a manera de recuperatorio. Al finalizar el cuatrimestre las clases presenciales comenzaban a habilitarse.

• Modalidad de promoción: Para promocionar se exigió tener aprobado el cursado de la materia y participar de una entrevista oral, en lo posible presencial, con la profesora responsable del curso. La fecha de la entrevista se fijó dentro de la última quincena de noviembre o primeros días de diciembre de 2021.

Como parte del análisis a priori, la profesora responsable del curso e investigadora llevó a cabo una experiencia similar a fines del cuatrimestre anterior (primer cuatrimestre de 2021). Los estudiantes debieron resolver un trabajo práctico sin la previa explicación teórica, investigar y estudiar saberes relativos a sucesiones aritméticas y geométricas, monto a interés simple y a interés compuesto y capitalización continua. La participación en esta experiencia fue voluntaria y los N=11 estudiantes manifestaron haber tenido un primer encuentro con los saberes involucrados. El objetivo de la clase era investigar y estudiar sólo lo necesario para resolver los problemas, rompiendo con el orden tradicional "explicación de la profesora y posterior resolución de trabajo práctico". Los estudiantes investigaron sólo lo útil para dar respuesta a esos problemas, escribieron sus producciones en sus apuntes y, en ocasiones, compartieron en pantalla alguna página web de interés. Además, sus producciones escritas fueron subidas en una Tarea en la plataforma Moodle de la cátedra. El rol de la profesora-investigadora fue el de guía del proceso de estudio y formó parte de un sistema más de información y, además, realizó observación participante. Además, uno de los ayudantes de cátedra realizó observación participante. El análisis de esta experiencia mostró el funcionamiento de algunos gestos didácticos asociados en parte a las dialécticas.

A partir de las notas de campo de la profesora y de los ayudantes, los trabajos escritos de los estudiantes y las grabaciones de las clases, se realizó una categorización inductiva que permitió construir indicadores del funcionamiento de los gestos didácticos a la manera de Parra y Otero (2017). Notamos a ellos como $I_{i,j}$ con $i=1,\ldots,10$, donde por ejemplo $I_{1,j}$ es un indicador *relacionado con* la

dialéctica D_1 del estudio y la investigación, con $j \geq 1$. Diremos que estos indicadores están *relacionados con*, ya que no son indicadores genuinos de las dialécticas pues no surgen de la implementación de un REI.
Los estudiantes se distribuyeron en grupos de 4 a 5 integrantes cada uno. Designamos con G_i $i=1, \ldots ,33$ a los grupos y con E_i, $i=1, \ldots ,153$ a los estudiantes.

5. RESULTADOS

En el ambiente no presencial de trabajo descripto anteriormente los estudiantes manifestaron un número importante de gestos didácticos $I_{i,j}$, que se asocian a las diez dialécticas, entendiendo que no son gestos genuinos de las dialécticas, ya que no se generan a partir de preguntas. A continuación, se enuncian los indicadores y se detallan algunos ejemplos para cada caso, que tienen que ver con protocolos de los estudiantes y acciones que ellos llevaron a cabo durante el cursado sin incluir la etapa de acreditación al final del cuatrimestre:

Indicadores de D_1: Dialéctica del estudio e investigación

$I_{1,1}$: *Búsquedas en Internet y otros sistemas de información,* de fórmulas relativas al interés simple y compuesto, de cómo se calcula la suma de los términos de una sucesión aritmética y geométrica respectivamente, del significado de la capitalización continua, de fórmulas para calcular el monto, de las distintas formas de resolver un sistema de ecuaciones, del modelo de Leontief, de las curvas de nivel y aplicaciones, de la definición de elasticidad de la demanda, de la función de Cobb Douglas, de la definición de derivadas parciales y su interpretación, del método de Lagrange, del método de programación lineal, etc.

$I_{1,2}$: *Estudio de saberes* relativos a las sucesiones aritméticas y geométricas, al interés simple, al interés compuesto y a la capitalización continua, a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos o más incógnitas, al dominio y la imagen de una función de dos variables, a la interpretación de las curvas de nivel, a la derivabilidad de funciones de dos o más variables e interpretaciones, a la elasticidad de la demanda y al cálculo de extremos de funciones de dos variables.

En la Figura 1 se muestra un ejemplo de $I_{1,1}$, el grupo G_{22} realizó búsquedas en Internet e indicó en sus escritos los links de acceso a esas páginas. Este grupo realizó búsquedas de saberes relativos al cálculo de extremos y de programación lineal.

Bibliográfica:

JAMES STEWART. PRECÁLCULO - MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO

MATEMÁTICAS APLICADAS a la administración y a la economía -Jagdish C. Arya

Vectores en el plano y en el espacio. Matemática IIC. Prof. Dra. Diana Salgado. Dto. de Matemática. UNS.

Función de 2 variables. Matemática IIC. Prof. Dra. Diana Salgado. Dto. de Matemática. UNS.

Otras fuentes:

Youtube:

FUNCIONES DE DOS VARIABLES: Definición, Gráficas, Curvas de Nivel y Aplicaciones | El Traductor. https://www.youtube.com/watch?v=ut_iqneq8EA&t=1640s&ab_channel=ElTraductordeIngenier%C3%ADa

Páginas web:

Unidad nº5 Programación Lineal. https://www.fio.unicen.edu.ar › Apuntes › unidad5

Figura 1: El grupo G_{22} realizó búsquedas en Internet

Indicadores de D_2: Dialéctica del individuo y del colectivo

$I_{2,1}$: *Discusiones entre los estudiantes a través de videoconferencia sobre los saberes pertinentes para resolver los ejercicios y toma de decisiones*. Por ejemplo, cuando los integrantes de cada grupo discuten sobre el origen de la fórmula de interés simple e interés compuesto, lo que les sería útil para resolver los problemas del TP1.

$I_{2,2}$: *Discusiones entre los estudiantes, la profesora y los ayudantes a través de videoconferencia sobre los saberes pertinentes para resolver los ejercicios y toma de decisiones*. Por ejemplo, sobre el origen de la fórmula de interés simple e interés compuesto, sobre las interpretaciones de las derivadas parciales de una función de dos o más variables, sobre los distintos tipos de elasticidades de la demanda, sobre las diferentes maneras de hallar valores extremos de una función de dos variables, etc.

$I_{2,3}$: *Profesora y estudiantes encienden sus cámaras y micrófonos para convocar a una discusión sobre los saberes pertinentes*, respetan los tiempos de cada uno de los integrantes, se escuchan. Este gesto es destacable ya que el hecho de tener que participar en los grupos para colaborar en un resultado colectivo hizo que los estudiantes no sólo estén conectados a la videoconferencia sino que además, debieron encender sus cámaras y micrófonos. Así, los estudiantes tuvieron una participación activa, no estaban presenciando una clase o una conferencia como espectadores.

$I_{2,4}$: *Los estudiantes se esfuerzan por estudiar para resolver los ejercicios y colaborar en una respuesta colectiva* a los problemas propuestos.

$I_{2,5}$: *Discusiones en cuanto al uso del editor de ecuaciones y de cómo trabajar con archivos y carpetas compartidas*.

Indicadores de D_3: Dialéctica del análisis (praxeológico y didáctico) y de la síntesis (praxeológica y didáctica)

$I_{3,1}$: *La profesora analiza la matemática involucrada en los trabajos prácticos*. Este indicador surgió principalmente en la etapa anterior al inicio de esta experiencia correspondiendo a un gesto de la profesora, no de los estudiantes.

Recepción:22/10/2021 *Aceptación: 30/05/2022*

$I_{3,2}$: *Los estudiantes analizan los saberes matemáticos* que entran en juego en las posibles respuestas a los problemas.
$I_{3,3}$: *Los estudiantes sintetizan los saberes matemáticos* involucrados en los problemas.

En la Figura 2 se muestra un ejemplo del indicador $I_{3,3}$, aquí se indica una parte de la síntesis que realizó el grupo G_1 con respecto a la elasticidad de la demanda, cuándo se define que ésta es elástica o inelástica.

Punto 11: Elasticidad

La elasticidad es la variación porcentual en la cantidad demandada de un bien A, cuando varía el precio del mismo bien A, manteniendo constante el precio del bien B. Y al mismo tiempo la variación que sufre la demanda del bien A, cuando cambia el valor del B, manteniendo constante el precio del bien A.
Esto se obtiene mediante η_{p_A} y η_{p_B} y de acuerdo a los resultado pueden clasificarse de la siguiente manera:

__Demanda "elástica":__ Cuando la variación de la cantidad demandada es porcentualmente superior a la del precio. Es decir, cuando $\eta_{p_A} > 1$ o $\eta_{p_B} > 1$

Figura 2*:* Síntesis de saberes relativos a la elasticidad de la demanda realizado por el G_1

Indicadores de D_4: Dialéctica del entrar y salir del tema

$I_{4,1}$: *Entrada a la Economía para estudiar los saberes relativos:* al modelo de Leontief (matriz de insumo-producto), a la función de Cobb-Douglas, a la elasticidad de la demanda, a la diferencia entre artículos complementarios y suplementarios, etc.

En la Figura 3 se muestra un ejemplo de $I_{4,1}$, El grupo G_{27} investigó la diferencia entre artículos sustitutos y complementarios y luego regresó a la matemática para responder los ejercicios.

__Punto 3:__

Si consideramos la Coca-Cola y la Pepsi, al ser estos dos productos muy similares, es natural que al no poder adquirir uno, los consumidores opten por adquirir el otro. De forma particular, si sube el precio de uno, los consumidores se verán más dispuestos a adquirir el otro. A este tipo de productos los llamamos Productos Suplementarios, Competitivos o Sustitutivos.

Por otra parte, si consideramos la cebolla y el tomate, usualmente estos dos productos son usados como ingredientes se encuentran combinados en una gran cantidad de platos, por lo tanto, si una persona no se encuentra en disposición de adquirir uno de ellos, no estará tentada a adquirir el otro.
De forma particular, si aumenta el precio de uno los consumidores se verán menos dispuestos a comprar el otro. A este tipo de productos los llamaremos **Productos Complementarios**.

Conociendo las ecuaciones de demanda de dos productos es posible determinar si estos son suplementarios y complementarios haciendo un análisis marginal. Para ser más precisos si $q_A(P_A, P_B)$ y $q_B(P_A, P_B)$ son las ecuaciones de demanda de dos productos A y B, entonces

$$\text{Si } \frac{\partial q_A}{\partial p_B} > 0 \text{ y } \frac{\partial q_B}{\partial p_A} > 0$$

Diremos que estos A y B son **Productos Suplementarios**, pues cuando aumenta el precio de uno, aumenta la demanda del otro.

$$\text{Si } \frac{\partial q_A}{\partial p_B} < 0 \text{ y } \frac{\partial q_B}{\partial p_A} < 0$$

Diremos que estos A y B son **Productos Complementarios**, pues cuando aumenta el precio de uno, disminuye la demanda del otro.

En otro caso, concluiremos que no son ni complementarios ni suplementarios.

Luego de esta introducción comenzamos a resolver el ejercicio.

Figura 3*:* El grupo G_{27} investiga en la economía y luego regresa a la matemática

Indicadores de D_5: Dialéctica del paracaidista y de las trufas

$I_{5,1}$: *Los estudiantes inspeccionan un problema hasta encontrar una forma adecuada de resolverlo.*

Un ejemplo de $I_{5,1}$: el grupo G_{11} intenta resolver el problema 10c) del TP4 (ver anexo), para ello los integrantes de este grupo discuten oralmente cómo llegar a una solución y ensayan distintas soluciones en forma escrita. Luego G_{11} advierte una manera de resolverlo, encuentra la "pepita de oro" que posibilita los cálculos. Resuelve la cuestión utilizando una derivada direccional (Ver Figura 4). En la Figura 4 se indica obviamente el resultado final, ya que todo el procedimiento hasta llegar a él fue principalmente oral, no tenemos otro registro escrito.

c) El triple del capital que en mano de obra.

Al tener una dirección, la cual es nuestro vector unitario $(1, 3)$, hacemos la derivada direccional.
Y al ser f una función diferenciable de x e y, su derivada direccional en la dirección del vector unitario es:

$$Du^{\rightarrow}(x, y) = \nabla f(1000, 500) * u^{\rightarrow}$$

Figura 4: El grupo G_{11} inspecciona cómo resolver el ejercicio 10c) del TP4

Indicadores de D_6: Dialéctica de las cajas negras y de las cajas claras

$I_{6,1}$: *Los estudiantes deciden profundizar algunos saberes.* Por ejemplo, cuando confunden fórmula de "interés" con la de "monto", deciden profundizar en ello, tratando de deducir las fórmulas del monto correspondiente. Otro ejemplo, cuando los estudiantes deciden profundizar en la fórmula de monto a interés capitalizable continuamente para conocer y comprender su origen, si bien finalmente usarían sólo para fórmula.

$I_{6,2}$: *Un estudiante manifiesta tener un reencuentro con la fórmula de interés compuesto*, expresa que le resulta familiar, pero se preocupa por demostrarla.

Indicadores de D_7: Dialéctica de la lectura y de la escritura

$I_{7,1}$: *Transcripción de fórmulas* en las que reemplazan, por ejemplo, las variables, por otras convenientes.

$I_{7,2}$: *Deducción por escrito de una expresión general* para el término de una sucesión aritmética o geométrica.

$I_{7,3}$: *Transcripción de lo escrito por la profesora o ayudantes en la pizarra (tableta gráfica).*

$I_{7,4}$: *Redacción de un resumen* de los saberes involucrados en los trabajos prácticos.

$I_{7,5}$: *Formulación de diferentes modelos de función* de costo, de ingreso y de utilidad y determinación de variables.

$I_{7,6}$: *Extracción de información de diferentes fuentes y reescritura, elaboración de resultados de los ejercicios e interpretación*.

$I_{7,7}$: *Redacción de los desarrollos y las respuestas de los problemas*. Este indicador se vio reflejado en la producción que los estudiantes compartían en la nube con la profesora y los ayudantes. Sus avances y retrocesos podían seguirse en línea. Además, la participación activa en la edición de los trabajos fue tenida en cuenta a la hora de la acreditación a finales del cuatrimestre.

$I_{7,8}$: *Interpretación de los saberes matemáticos* dentro del contexto de la economía o desde un aspecto geométrico.

La Figura 5 constituye un ejemplo de $I_{7,5}$, se muestra el protocolo del grupo G_1 que realizó la formulación de una función de costo (TP5, ver anexo). El mismo grupo realiza una interpretación del método de los multiplicadores de Lagrange desde el punto de vista geométrico (TP5, ver anexo), constituyendo un ejemplo de $I_{7,9}$ (Figura 6).

Punto 5:

Volumen de la caja: $x \cdot y \cdot z = 6$

$$z = \frac{6}{x \cdot y}$$

Costo del fondo $= 3(x \cdot y)$

Costo del frente y pared de atrás $= 1 \cdot 2(x \cdot z)$

Costo de los laterales $= 0,5 \cdot 2(x \cdot z) = (y \cdot z)$

Costo total$= 3(x \cdot y) + 2(x \cdot z) + (y \cdot z)$

$$= 3(x \cdot y) + 2(x \cdot \frac{6}{x \cdot y}) + (y \cdot \frac{6}{x \cdot y})$$

$$C(x, y) = 3xy + \frac{12}{y \cdot} + \frac{6}{x} = 3xy + 12(x)^{-1} + 6(y)^{-1}$$

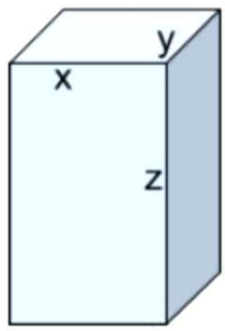

Figura 5: El grupo G_1 realizó la formulación de una función de costo.

Recepción:22/10/2021 Aceptación: 30/05/2022

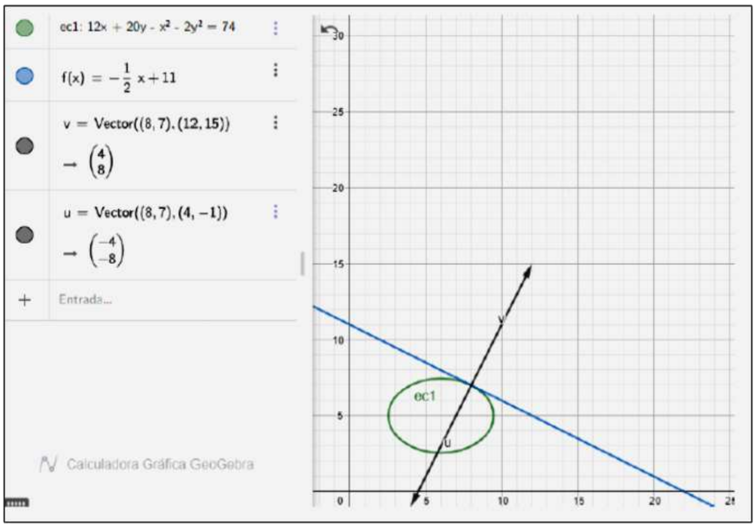

Figura 6: El grupo G_1 interpreta el método de Lagrange utilizando un software.

Indicadores de D_8: Dialéctica del medio-media

$I_{8,1}$: *Incorporación al medio de preguntas.* Por ejemplo, en una de las sesiones el estudiante E_{98} formuló la pregunta *¿el precio de un producto podría ser negativo?* Los grupos investigaron en diferentes sistemas de información y dieron cuenta que en general los precios son positivos, pero acordamos que en nuestro caso consideraríamos precios no negativos. Otra pregunta que surgió y que estaba candente en medio de la pandemia fue: *¿qué es un vector?* Investigaron la idea de vector desde distintos puntos de vista, aplicado a diferentes áreas de las ciencias, por ejemplo, la economía, la medicina, la física, la química y la matemática. Finalmente regresaron al TP3 para resolver ejercicios relacionados con vectores desde una perspectiva matemática.

$I_{8,2}$: *Ingreso de diferentes saberes que pueden ser útiles para resolver los problemas.* Por ejemplo, ingreso de las fórmulas del monto a interés simple, compuesto y con capitalización continua y decisión de analizarlas para comprobar su veracidad y su pertinencia.

$I_{8,3}$: *Ingreso al medio del uso de procesadores de texto y editores de ecuaciones* para digitalizar las producciones de los estudiantes. La mayoría de los estudiantes manifestó en esta oportunidad tener un primer encuentro con el uso de editores de ecuaciones.

La Figura 7 corresponde al indicador $I_{8,3}$: el grupo G_{14} utiliza la edición de ecuaciones en su procesador de textos. En las sesiones de clase, fue habitual escuchar conversaciones entre los estudiantes sobre cómo utilizar las distintas herramientas del procesador de textos para escribir sus producciones. Manifestaron además su conformidad y su interés por dominar estas herramientas ya que les sería útil para la edición de futuros trabajos en otras cátedras.

Si $\lambda = 15$, obtenemos que $q_1 = 40$ y $q_2 = 60$. Hallo el hessiano limitado y lo valuamos en el punto $(40, 60)$, con $\lambda = 15$, para determinar si es máximo o mínimo. El hessiano en forma general es:

$$H = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} \\ g_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix}$$

Con las derivadas segundas quedaría:

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0{,}2 & 0 \\ 1 & 0{,}2 & 0 \end{vmatrix} = -0{,}2 < 0$$

Dado que tenemos un hessiano constante, no hace falta evaluarlo en el punto $(40, 60)$, ya que darían los mismos números.

Figura 7: El grupo G_{14} utiliza la edición de expresiones matemáticas en su procesador de textos

Indicadores de D_9: Dialéctica de la difusión y de la recepción

$I_{9,1}$: *Los estudiantes encienden sus cámaras y micrófono para difundir oralmente los resultados de los ejercicios y provocar discusiones.*

$I_{9,2}$: *Los estudiantes difunden oralmente los resultados de los problemas a la profesora y a los ayudantes*.

$I_{9,3}$: *Los estudiantes comunican en forma escrita los resultados de los problemas* a la profesora y a los ayudantes. Estos trabajos escritos (digitalizados usando un procesador de texto y convertidos a formato pdf) fueron subidos a una tarea en la plataforma Moodle y allí fueron calificados.

En la Figura 8, por ejemplo, se muestra parte de la resolución del ejercicio 9 (TP5) que realizó el grupo G_{14}. Este escrito es leído por la profesora y los ayudantes, así éste constituye un ejemplo del indicador $I_{9,3}$. Además, se corresponde con un ejemplo de $I_{8,3}$, ya que este grupo, como el resto de los grupos, tuvo que iniciarse en el uso de editores de ecuaciones.

Interpretación geométrica:

Se cumple que, en ese punto, $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$

$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$

$\vec{\nabla} f = (0{,}2q_1 + 7; 15), \vec{\nabla} g = (1{,}1)$

$\vec{\nabla} f(1{,}1) = (7{,}2; 15)$

La curva de nivel que pasa por el punto $(1, 1)$ tiene ecuación $0.1q_1^2 + 7q_1 + 15q_2 + 1.000 = c$. Como el punto pertenece a la curva, reemplazo en la ecuación para obtener el valor de c $0.1(1)^2 + 7 * 1 + 15 * 1 + 1.000 = c$, de lo cual $c = 1.022.1$. La curva de nivel que pasa por este punto es entonces $0.1q_1^2 + + 7q_1 + 15q_2 = 22.1$

El punto $(1. 1)$ que pertenece a esta curva de nivel y a la curva restricción, es el que ofrece un valor de c mínimo, es decir un valor mínimo para la función $f(q_1, q_2)$. Si graficamos varias curvas de nivel, nos daríamos cuenta que la curva de ecuación $0.1q_1^2 + + 7q_1 + 15q_2 = 22.1$ es la única que pasa por el punto $(1. 1)$ y que es tangente a la curva restricción $g(q_1, q_2) = q_1 + q_2 - 100$ en ese punto. En ese punto los gradientes son paralelos.

Figura 8: Difusión escrita de la resolución de un ejercicio por parte de G_{14}

Indicadores de D_{10}: Dialéctica de las preguntas y respuestas

$I_{10,1}$: *Los estudiantes formulan preguntas en forma oral:* ¿de qué se trata una progresión aritmética?, ¿y geométrica?, ¿cómo se calcula la suma de los elementos de una sucesión?, ¿de qué se trata el interés simple?, ¿y compuesto?, ¿qué es la capitalización?, ¿y la capitalización continua?, ¿qué es un vector?, ¿cómo se representan el dominio y la imagen de una función de dos variables?, ¿cómo se resuelve un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas?, etc.

$I_{10,2}$: *La profesora y ayudantes formulan preguntas en forma oral, que pueden ser útiles para resolver los problemas, y las escriben en sus pizarras.*

$I_{10,3}$: *Los estudiantes elaboran respuestas a los problemas y las escriben en sus apuntes*.

Un ejemplo del indicador $I_{10,3}$ puede observarse en la Figura 9: el grupo G_{13} resaltó en color la respuesta al ejercicio 6b) del TP4 (ver anexo) y dejó escrita su interpretación. No se conformó con hallar el resultado numérico, sino que dejó explícita su interpretación.

b) Busco el diferencial

$$dq_A = \frac{\partial q_A}{\partial P_A}(9, 16) \times \Delta x + \frac{\partial q_A}{\partial P_B}(9, 16) \times \Delta y$$

$$dq_A = \left(-\frac{5 \times 16 \times \sqrt{9}}{9^{2} \times \sqrt{16}}\right) \times 0 + \left(\frac{5\sqrt{9}}{9\sqrt{16}}\right) \times (-2) = -\frac{5}{6}$$

$nota$: $\Delta y = 14 - 16 = -2.$

Cuando el precio del producto b (P_b) disminuye de 16 a 14, la demanda del producto A (q_A)decrece aproximadamente en $5/6$.

Figura 9: Difusión escrita de la resolución de un ejercicio

Por otra parte, las preguntas formuladas por los estudiantes quedaron registradas en los encuentros realizados a través de videoconferencia, lo cual da cuenta del indicador $I_{10,1}$.

6. DISCUSIÓN

Respondiendo a las preguntas de investigación, los resultados hasta aquí enunciados confirman que, en un contexto de virtualidad y aunque la experiencia no se encuentre enmarcada en un REI, fue posible detectar indicadores del funcionamiento de algunos gestos relacionados con las dialécticas. Se observa que el grupo de estudiantes con la guía de la profesora y los ayudantes supo investigar extrayendo información de diferentes fuentes y estudiar sólo el material útil para resolver los problemas, lo que implican gestos del estudio y la investigación. Hubo un compromiso por colaborar en la resolución de los trabajos prácticos lo que provocó discusiones entre los estudiantes, la profesora y los ayudantes, y la necesidad de encender sus cámaras y micrófonos, es decir, se logró que haya una participación activa de gran parte de los estudiantes. Esta iniciativa de colaboración en el grupo da cuenta del funcionamiento de gestos del individuo y del colectivo. Además, toda vez que se producía el encuentro con algún saber se realizaba un análisis de qué, cómo y cuánto estudiar de él para finalmente realizar una síntesis de esos saberes. Estas acciones indican el funcionamiento del análisis y de la síntesis (praxeológico y didáctico). Por otra parte, hubo un análisis de los saberes incorporados al medio didáctico y discusión de su pertinencia y de su utilidad, indicando la presencia de gestos del medio-media o de la conjetura y de la prueba, siendo tanto el análisis como la discusión realizados principalmente en forma oral. La lectura y

Recepción:22/10/2021 Aceptación: 30/05/2022

escritura de información desde diferentes medias, reescritura, desarrollo e interpretación de resultados se hicieron presentes, dando cuenta el funcionamiento de gestos de la lectura y escritura. La difusión y recepción de respuestas convocando a un cuestionamiento surgieron ambas en los encuentros sincrónicos, lo que condujo nuevamente a los integrantes a encender sus cámaras y audios. Este último gesto implica el funcionamiento de gestos correspondientes con la difusión y recepción.

En este trabajo no se determina cuantitativamente cuál o cuáles de las dialécticas funcionaron en mayor o menor medida, lo que podría deducirse a través de un análisis estadístico cuantitativo. No obstante, es posible afirmar que los gestos que surgieron en menor medida tuvieron que ver con el "entrar y salir del tema", entrada a una disciplina para luego regresar a la matemática. Además, la inspección desde grandes áreas del saber, gestos relacionados con actitudes del paracaidista y de las trufas, no se hizo presente debido posiblemente a que los problemas no eran abiertos, pero aun así los estudiantes supieron detectar qué les resultaba apropiado para resolver los problemas, estableciendo el nivel de gris adecuado para cada saber, dando cuenta del funcionamiento de gestos de las cajas negras y de las cajas claras.

Por otra parte, no hubo formulación de preguntas en la manera que se espera en un REI, pues no hemos desarrollado este dispositivo didáctico, tampoco hubo formulación de preguntas por parte de los estudiantes que quedaran explicitadas en forma escrita, seguramente por el tipo de actividad propuesto por la profesora. No obstante, ocurrió la formulación oral de preguntas, relacionadas con los saberes involucrados, que intentaron responder. Las preguntas surgidas, por supuesto, no generaron una red de preguntas, como debiera ocurrir en un REI.

Es importante destacar el valor de estas acciones llevadas a cabo por los estudiantes, que muestran:

- el interés por desarrollar los trabajos prácticos con una metodología diferente, sin la explicación previa de la profesora o profesor.
- el compromiso puesto a prueba para recorrer caminos de estudio e investigación a los cuales no están habituados,
- el cambio de actitud frente a las pantallas de sus computadoras.

Finalmente, destaco que estas acciones podrían considerarse como una herramienta útil para la evaluación continua de los estudiantes durante todo el proceso de aprendizaje, más allá de la implementación o no de un REI.

7. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Este trabajo muestra resultados de una experiencia realizada en un curso de matemática de nivel universitario en épocas de pandemia y en un ambiente no presencial, a través de videoconferencias, y en la que se promueve el estudio, la investigación y el trabajo autónomo de los estudiantes. Si bien la metodología de trabajo utilizada no se refiere a un REI, fue posible detectar en los estudiantes (N=153) el funcionamiento de ciertas acciones que podrían relacionarse con las dialécticas, gestos didácticos esenciales en todo proceso de estudio e investigación, pero en este caso adaptados a la no presencialidad.

El análisis de la experiencia desde el punto de vista de las dialécticas permitió definir un número importante de indicadores del funcionamiento de ciertas acciones que los estudiantes dejaron plasmadas en forma escrita u oral, en sus producciones o en las grabaciones de las clases, Se destaca principalmente el funcionamiento de gestos del estudio y la investigación, del individuo y del colectivo, de la lectura y escritura y de la difusión y recepción, debido al compromiso de los estudiantes por investigar y estudiar solos, sin la explicación previa de la profesora, pero a su vez en conjunto con el resto de los integrantes de su grupo o del curso, lo que provocó constantemente la discusión y difusión de resultados principalmente en forma oral, provocando el encuentro con el saber matemático, y la elaboración, redacción y escritura de las respuestas a los ejercicios.

Debido al entusiasmo manifestado por los estudiantes integrantes de esta experiencia, la profesora-investigadora decidió replicar esta forma de trabajo durante el primer cuatrimestre de 2022 desde la primera clase, con todos los inscriptos en la cátedra y de manera presencial, réplica que actualmente se encuentra en curso y de la cual podría realizarse un análisis a futuro.

8. REFERENCIAS

Cantoral, R., Ríos Jarquín, W., Reyes Gasperini, D., Cantoral Uriza, E. A., Barrios, E., Fallas Soto, R. & Bonilla Solano, A. (2020). Matemática Educativa, transversalidad y COVID-19. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *23*(1).

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. Javier García (Éd.), Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, Universidad de Jaén, 705-746.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, v. 2, n. 2, 161-182. Disponible en https://www.hipatiapress.com/hpjournals/index.php/redimat/article/view/631

Failache, E., Katzkowicz, N., & Machado, A. (2020). La Educación en Tiempos de Pandemia y el Día Después: El Caso de Uruguay. Revista Internacional De Educación Para La Justicia Social, 9(3). Disponible en https://revistas.uam.es/riejs/article/view/12185

García-Mejía, R. O., & García-Vera, C. E. (2020). Metodología STEAM y su uso en Matemáticas para estudiantes de bachillerato en tiempos de pandemia Covid-19. *Dominio de las Ciencias*, *6*(2), 163-180.

Gazzola, M. P., Otero, M. R. & Llanos, V. C. (2019). The characteristics didactic gestures of a Study and Research Path involving mathematics and physics at secondary school. Open Access Publishing Group. *European Journal of Education Studies*. 6(7), 491-502. doi: 10.5281/zenodo.3529845

Gazzola, M. P., Otero, M. R. & Llanos, V. C. (2020). Acciones didácticas en el desarrollo de un recorrido de estudio y de investigación que involucra a la matemática y a la física en la escuela secundaria. *Perspectiva Educacional*. Valparaíso. Vol. 59, 52 – 80. doi: 10.4151/07189729-Vol.59-Iss.1-Art.1006

Gómez, N. L. (2021). La Educación Matemática en hogares venezolanos durante la pandemia. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (20), 256-278.

Recepción:22/10/2021 *Aceptación: 30/05/2022*

Lescano, A., Puy, J., & Puy, A. (2021). De la presencialidad a la virtualidad: Enseñar Matemáticas en Pandemia. *TE & ET*.
Martínez, D. J., Serna, J. S., & Arrubla, J. A. (2020). Educación rural y dispositivo evaluación en tiempos de 'COVID-19': voces de profesores de Matemática. *Revista latinoamericana de Etnomatematica*, *13*(1), 86-103.
Otero, M. R., Fanaro, M., Corica, A., Llanos, V. C., Sureda, P. & Parra, V. (2013). *La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el Aula de Matemática*. Tandil: Dunken.
Parra, V. & Otero, M. R. (2017). Enseñanza de la matemática por recorridos de estudio e investigación: indicadores didáctico-matemáticos de las "dialécticas". *Educación matemática*, 29(3), 9-49, México. doi:10.24844/EM2903.01
Parra, V. & Otero, M. R. (2018). Antecedentes de los recorridos de estudio e investigación (REI): características y génesis. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 13(2), 1-18. Disponible en http://ppct.caicyt.gov.ar/index.php/reiec/article/view/14425/45454575759173
Pincheira Hauck, N. G., & Vásquez Ortiz, C. A. (2021). Recursos virtuales para la enseñanza del álgebra: un aporte para la priorización curricular chilena frente a la pandemia de la COVID-19. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática, 2021, vol. 17, num. 61, p. 1-21*.
Rizzo, K. (2021). FotoGebra: un recurso educativo y creativo en tiempo de pandemia. *Cuadernos*, *20*, 180-191.
Salgado, D. (2019). *Diseño, implementación, análisis y evaluación de un Recorrido de Estudio e investigación en el nivel universitario relativo al cálculo en dos variables* (Tesis de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias - Mención Matemática). Tandil: UNICEN.
Salgado, D. & Otero, M.R. (2020). Enseñanza por investigación en un curso de matemática de nivel universitario: los gestos didácticos esenciales. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, 22(1), 532-557. doi: 10.23925/1983-3156.2020v22i1p532-557. Disponible en https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/view/Volume%2022%20n%C2%BA1%2C%202020
Salgado, D., Otero, M.R. & Parra, V. (2017). Gestos didácticos en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación en el nivel universitario relativo al cálculo: el funcionamiento de las dialécticas. *Revista Perspectiva Educacional*, 56(1), 84-108. doi: 10.4151/07189729-Vol.56-Iss.1-Art.470
Salgado, D., Otero, M.R. & Parra, V. (2018). Research and study paths at the university: a Praxeological Model of Reference related to costs calculation. Pre-proceeding 6ème Congrès International sur la Thèorie Anthropologique du Didactique (CITAD6) (pp. 326-338), Autrans, Université de Grenoble. Disponible en https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/view/Volume%20Especial%20CITAD%206
Scott, P. (2021). Educación Matemática y Pandemia: experiencias en los Estados Unidos de América. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (20), 31-40.
Silva, F. C., Lima, J. D. N., Alencar, J. C. C., Silva, R. M., & Pinheiro, J. M. L. (2021). Educação matemática e pandemia: as movimentações do campo de pesquisa frente ao contexto que se impõe. *Ensino Da Matemática Em Debate*, 8(2), 157–177. Disponible en https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/54080

9. ANEXOS

1. Para las funciones de producción siguientes, encuentre las funciones de producción marginal $\dfrac{\partial P}{\partial k}$ y $\dfrac{\partial P}{\partial l}$:

   a) $P = 15lk - 3l^2 + 5k^2 + 500$

   b) $P = 2,314\,l^{0,357}k^{0,643}$

2. **Función de producción de Cobb-Douglas.** En economía, una función de producción de Cobb-Douglas tiene la forma $P = Al^{\alpha}k^{\beta}$, donde A, α y β son constantes y $\alpha + \beta = 1$. Para tal función, demuestre que:

   a) $\dfrac{\partial P}{\partial l} = \alpha P/l$

   b) $\dfrac{\partial P}{\partial k} = \beta P/k$

   c) $l\dfrac{\partial P}{\partial l} + k\dfrac{\partial P}{\partial k} = P$.
   Esto significa que al sumar los productos de la productividad marginal por cada factor y la cantidad de ese factor, se obtiene la producción total P.

3. Las funciones de demanda para los productos A y B son respectivamente q_A y q_B. Determine en cada caso si A y B son competitivos, complementarios o ni uno ni otro.

   a) $q_A = 1000 - 50p_A + 2p_B$; $q_B = 500 + 4p_A - 20p_B$

   b) $q_A = \dfrac{100}{p_A\sqrt{p_B}}$; $q_B = \dfrac{500}{p_B\sqrt[3]{p_A}}$

4. Suponga que una función de producción está dada por $P = \dfrac{kl}{2k + 3l}$.

   a) Determine las funciones de productividad marginal.

   b) Demuestre que cuando $k = l$, la suma de las productividades marginales es $1/5$.

5. **Status.** Se cree que el estatus general S_g de una persona es una función atribuible a la educación S_e y al ingreso S_i, donde S_g, S_e y S_i se representan en forma numérica. Si

$$S_g = 7\sqrt[3]{S_e}\sqrt{S_i}$$

   determine $\dfrac{\partial S_g}{\partial S_e}$ y $\dfrac{\partial S_g}{\partial S_i}$ cuando $S_e = 125$ y $S_i = 100$, e interprete sus resultados.

6. **Demanda.** Suponga que las ecuaciones de demanda para los productos relacionados A y B son

$$q_A = 10\sqrt{\frac{p_B}{p_A}} \quad \text{y} \quad q_B = 3\sqrt[3]{\frac{p_A}{p_B}}$$

   donde q_A y q_B son las cantidades demandadas de A y de B, y p_A y p_B son los precios correspondientes (en dólares) por unidad.

   a) Encuentre los valores de las dos demandas marginales para el producto A cuando $p_A = 9$ y $p_B = 16$. Interprete los resultados.

   b) Si p_B se reduce de 16 a 14, con p_A fijo en 9, use el inciso anterior para estimar el cambio correspondiente en la demanda para el producto A.

Figura 10: Trabajo práctico 4, incisos 1 al 6

7. Sea la función de producción $Q = Q(K, L, t)$ donde, aparte de los dos insumos K y L, hay un tercer argumento, que denota tiempo. La presencia del argumento t indica que la función de producción puede cambiar con el tiempo en respuesta a cambios tecnológicos. Así, ésta es una función de producción dinámica en vez de estática. Puesto que el capital y la mano de obra pueden cambiar también con el tiempo, podemos escribir $K = K(t)$ y $L = L(t)$. Encuentre una expresión para la tasa de cambio de la producción respecto al tiempo.

8. **Función de costo.** Suponga que el costo C de producir q_A unidades del producto A, y q_B unidades del producto B está dado por

$$C = (3q_A^2 + q_B^3 + 4)^{1/3}$$

y que las funciones de demanda para los productos están dadas por $q_A = 10 - p_A + p_B^2$ y $q_B = 20 + p_A - 11p_B$. Use la regla de la cadena para evaluar $\dfrac{\partial C}{\partial p_A}$ y $\dfrac{\partial C}{\partial p_B}$ cuando $p_A = 25$ y $p_B = 4$.

9. En un determinado país la ley de demanda del té responde a $q_1 = p_1^{-1,2} p_2^{0,8}$ donde q_1 es la cantidad demandada del té y p_1 es su precio, mientras que p_2 es el precio de la yerba mate. Si actualmente $p_1 = 5$ y $p_2 = 1$ (en pesos):

   a) Calcule el cambio producido en la demanda q_1 si p_1 aumenta 1 peso y p_2 aumenta 2 pesos.
   b) Halle un valor *aproximado* de ese cambio.

10. Dada la función de producción $f(x, y) = 100x^{0,6}y^{0,4}$, (donde x es cantidad de mano de obra e y es cantidad de capital invertido), determine en cuánto variaría *aproximadamente* la productividad si, a partir del momento en el cual $(x, y) = (1000, 500)$, se desea invertir:

    a) una unidad más de mano de obra manteniendo fija la cantidad de capital invertido,
    b) una unidad más de capital invertido manteniendo fija la cantidad de mano de obra,
    c) el triple en capital que en mano de obra.

11. **Elasticidad.** Sea f una función de demanda para el producto A y $q_A = f(p_A, p_B)$ donde q_A es la cantidad demandada de A cuando su precio por unidad es p_A y el precio por unidad del producto B es p_B.
La elasticidad parcial de la demanda de A con respecto a p_A, denotada η_{p_A} se define como

$$\eta_{p_A} = \left(\frac{p_A}{q_A}\right)\left(\frac{\partial q_A}{\partial p_A}\right) = \frac{\frac{\partial q_A}{\partial p_A}}{\frac{q_A}{p_A}}$$

La elasticidad parcial de la demanda de A con respecto a p_B, denotada η_{p_B} se define como

$$\eta_{p_B} = \left(\frac{p_B}{q_A}\right)\left(\frac{\partial q_A}{\partial p_B}\right) = \frac{\frac{\partial q_A}{\partial p_B}}{\frac{q_A}{p_B}}$$

Desde un punto de vista informal, η_{p_A} es la razón de un cambio porcentual en la cantidad demandada de A con respecto a un cambio porcentual en el precio de A cuando el precio de B está fijo. De manera similar, η_{p_B} puede interpretarse como la razón de un cambio porcentual en la cantidad demandada de A, a un cambio porcentual en el precio de B cuando el precio de A se mantiene fijo. En los siguientes casos, encuentre η_{p_A} y η_{p_B} para los valores dados de los precios e interprete cada caso:

    a) $q_A = 1000 - 50p_A + 2p_B$; $p_A = 2$, $p_B = 10$.
    b) $q_A = \dfrac{100}{p_A\sqrt{p_B}}$; $p_A = 1$, $p_B = 4$.

Figura 11: Trabajo práctico 4, incisos 7 al 11

5. **Costo.** Una caja rectangular sin tapa debe tener un volumen de 6 pies^3. El costo por pie cuadrado de material es de \$3 para el fondo, \$1 para el frente y la parte de atrás, y \$0.50 para los otros dos lados. Encuentre las dimensiones de la caja de manera que el costo de los materiales sea mínimo.

   (Rta: 1 pie por 2 pies por 3 pies)

6. **Colusión.** Suponga que A y B son las únicas dos empresas en el mercado que venden el mismo producto (se dice que son *duopolistas*). La función de demanda industrial para el producto está dada por

$$p = 92 - q_A - q_B$$

   donde q_A y q_B denotan la producción y venta de A y B, respectivamente. Para A la función de costo es $C_A = 10q_A$; para B, es $C_B = 0{,}5q_B^2$. Suponga que las compañías deciden entrar en un acuerdo sobre el control de precios y producción para actuar en conjunto como un monopolio. En este caso se dice que entran en una *colusión*. Demuestre que la función de utilidad para el monopolio está dada por

$$P = pq_A - C_A + pq_B - C_B$$

   Exprese P en función de q_A y q_B, y determine cómo debe distribuirse la producción para maximizar la utilidad del monopolio.

7. Un fabricante monopolista vende dos tipos de lámparas. Por su experiencia, ha decidido que si produce x lámparas del primer tipo e y lámparas del segundo, se pueden vender respectivamente a $(100 - 2x)$ y a $(125 - 3y)$ unidades monetarias (u.m.) cada una. El costo de fabricación de x lámparas del primer tipo e y lámparas del segundo es $(12x+11y+4xy)$ u.m. ¿Cuántas lámparas de cada tipo debería fabricar a fin de lograr una ganancia máxima y cuál puede ser dicha ganancia? (Considere precios y cantidades no negativos) (Respuesta: 9 lámparas del primer tipo, 13 del segundo tipo, utilidad máxima 1137 u.m.)

8. Suponga que $f(x, y) = -2x^2 + 5y^2 + 7$, donde x e y deben satisfacer la ecuación $3x - 2y = 7$. Encuentre los extremos relativos de f sujetos a la condición dada de x e y, despeje primero a y de la segunda ecuación y sustituya el resultado para y en la ecuación dada. Así, f se expresa como función de una variable para la cual sus extremos pueden encontrarse de la manera usual.

   (Rta: mínimo relativo en (105/37, 28/37))

9. **Asignación de producción.** Para surtir una orden de 100 unidades de su producto, una empresa desea distribuir la producción entre sus dos plantas, planta 1 y planta 2. La función de costo total está dada por

$$C = f(q_1, q_2) = 0{,}1q_1^2 + 7q_1 + 15q_2 + 1000$$

   donde q_1 y q_2 son los números de unidades producidas en las plantas 1 y 2, respectivamente. ¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos? Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange. Interprete geométricamente.

   (Rta: planta 1, 40 unidades; planta 2, 60 unidades)

10. **Maximización de la producción.** La función de producción de una compañía es

$$f(l, k) = 12l + 20k - l^2 - 2k^2$$

   El costo de l y k para la compañía es de 4 y 8 por unidad, respectivamente. Si la compañía quiere que el costo total sea 88, encuentre la producción máxima posible sujeta a esta restricción de presupuesto. Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange. Interprete geométricamente.

   (Rta: 74 unidades cuando $l = 8$, $k = 7$)

Figura 12: Trabajo práctico 5, incisos 5 al 10

11. **Presupuesto para publicidad.** Una compañía de computadoras tiene un presupuesto mensual para publicidad de \$60000. Su departamento de mercadotecnia estima que si se gastan x dólares cada mes en publicidad en periódicos, e y dólares cada mes en publicidad por televisión, entonces las ventas mensuales estarán dadas por

$$S = 90x^{1/4}y^{3/4}$$

dólares. Si la utilidad es el 10 % de las ventas, menos el costo de la publicidad, determine cómo asignar el presupuesto publicitario para maximizar la utilidad mensual.

(Rta: \$ 15000 en publicidad en periódicos y \$ 45000 en publicidad en televisión)

12. a) **Producción para utilidad máxima.** Un fabricante de juguetes prepara un programa de producción para dos nuevos artículos, camiones y perinolas, con base en la información concerniente a sus tiempos de ensamblado dados en la tabla que sigue:

	Máquina A	**Máquina B**	**Acabado**
Camión	2h	3h	5h
Perinola	1h	1h	1h

Por ejemplo, cada camión requiere de 2 horas en la máquina A. Las horas que los empleados tienen disponibles por semana son: para operación de la máquina A, 80 horas; para la B, 50 horas; para acabado, 70 horas. Si las utilidades en cada camión y cada perinola son de \$7 y \$2, respectivamente, ¿cuántos juguetes de cada uno deben producirse por semana con el fin de maximizar la utilidad? ¿Cuál es esta utilidad máxima?

(Rta: 10 camiones, 20 perinolas; \$ 110)

b) **Formulación de dieta.** Una dieta debe contener al menos 16 unidades de carbohidratos y 20 de proteínas. El alimento A contiene 2 unidades de carbohidratos y 4 de proteínas; el alimento B contiene 2 unidades de carbohidratos y 1 de proteína. Si el alimento A cuesta \$1.20 por unidad y el B \$0.80 por unidad, ¿cuántas unidades de cada alimento deben comprarse para minimizar el costo? ¿Cuál es el costo mínimo?

(Rta: 4 unidades de alimento A, 4 unidades de alimento B; \$ 8)

c) **Campaña publicitaria.** Una empresa está estudiando llevar a cabo una campaña publicitaria, para ello dispone de \$ 900.000. Puede difundir sus anuncios en dos canales publicitarios distintos, el primero de ellos cobra \$ 12.000 cada vez que emite un anuncio, mientras que el segundo cobra \$ 30.000. La probabilidad de que un anuncio del primer canal sea visto es del 30 %, mientras que del segundo es del 75 %. Como mínimo deben emitirse 25 anuncios en el primer canal y 10 en el segundo. Determine el número de anuncios que debe lanzar en cada canal de manera que maximice la probabilidad de que se vea el anuncio de la empresa, teniendo en cuenta la restricción presupuestaria y las del número de anuncios.

Figura 13: Trabajo práctico 5, incisos 11 y 12

Diana Patricia Salgado

Doctora en Enseñanza de las Ciencias, mención Matemática, UNCPBA, Tandil, Argentina (2019). Directora: Dra. María Rita Otero. Co-directora: Dra. Verónica Parra. *Magíster en Matemática.* Universidad Nacional del Sur. UNS (2006). *Profesora en Matemática*. UNS (1991).*Licenciada en Matemática*. UNS (1990). Profesora Adjunta con Dedicación Exclusiva. Ordinario. Asignatura: Análisis Matemático I y Análisis Matemático II (2011 y continúa). Integro los proyectos “Enseñanza de la matemática y las ciencias en la secundaria obligatoria y la universidad: didáctica, formación de profesores y conceptualización”. (2020 a 2022). Directora: Dra. M.R. Otero. Co-Directora: Dra. V.C. Llanos y el proyecto "Enseñanza de las Ciencias y la Matemática: recursos utilizados por los docentes de la escuela secundaria para enseñar en la modalidad on-line". (2021 a 2022). Directora: Dra. V.C. Llanos. Co-Directora: Dra. M.R. Otero. *Integrante del Núcleo de Investigación en Enseñanza de las Ciencias y la Tecnología*, NIECYT (2012 y continúa).

Línea de investigación
Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD): Desarrollo e implementación de dispositivos didácticos en el marco de la enseñanza por investigación en el nivel universitario.