REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS
ISSN 1850-6666

Dificultades en la comprensión del concepto derivada de una función.

Nora Elisa Pereyra[1], Carlos Gabriel Herrera[2]

npereyra46@gmail.com, cgherrera@tecno.unca.edu.ar

1Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Catamarca. Argentina
2 Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas. Universidad Nacional de Catamarca. Argentina.

Resumen

El concepto de derivada de una función ha sido analizado por numerosos autores en el campo de la Didáctica de la Matemática, y en general, las conclusiones de sus investigaciones, coinciden en que los alumnos tienen dificultades en su comprensión. En este sentido se planteó el presente trabajo fundamentado en la teoría APOE. El proceso de investigación, en esta teoría, conlleva el realizar un modelo cognitivo llamado descomposición genética, mediante el cual un estudiante puede construir un concepto matemático. Esta última, consiste en una hipótesis sobre una descripción detallada, de las construcciones que los estudiantes pueden hacer para aprender un concepto. Por ello, basándonos en la mencionada teoría se planteó como objetivo del trabajo, analizar las dificultades en la comprensión del concepto matemático de derivada, presentando una propuesta de descomposición genética, a efectos de llevar a cabo la investigación. Este estudio es de metodología cualitativa, de tipo descriptivo, empleando estudio de casos, y se aplicó a tal fin un instrumento de recolección de datos, que consistió en ítems destinados a analizar si los estudiantes identifican con claridad el concepto de derivada de una función en un punto, como así también el concepto de función derivada. En esta primera etapa, y fundamentado en la descomposición genética propuesta, se han podido determinar las dificultades predominantes en la construcción del concepto matemático derivada, observándose que los estudiantes presentan conocimientos parciales del concepto, mostrando inconvenientes tanto para encapsular en objeto, el proceso de determinación de la derivada de una función, como para llevar a cabo el estudio del comportamiento de funciones, en base al signo de la derivada primera.
Palabras Claves: Derivada, Dificultades, APOE

Difficulties in understanding the concept derivative of a function

Abstract

The derivative of a function has been analysed by many authors in the field of Mathematics Education, and in general, the conclusions of their research agree that students have difficulties in understanding this mathematical concept. In this sense, the present work is based on the APOS theory. The research process in this theory involves the proposal of a cognitive model called genetic decomposition, through a student can construct a mathematical knowledge. It consists of a hypothesis about a detailed description of the constructions that students can make to learn a concept. Therefore, the aim of this work was to analyze the difficulties in the understanding of the mathematical concept of derivative of a function in the framework of the APOE theory, presenting a proposal of genetic decomposition, in order to carry out the research. Methodologically it is a descriptive case study. For this purpose a data collection instrument was applied, which consisted in a set of questions aimed to analyse whether students clearly identify the concept of a derivative of a function at a point, as well as the concept of a derivative function, it has been possible to determine the predominant difficulties in the construction of the concept of derivative, observing that the students present partial knowledge of the concept, showing inconveniences both to encapsulate in object, the process of determining the derivative of a function and to carry out the study of the behavior of functions, based on the sign of the first derivative.
Keywords: Derivative, Dificulties, APOS.

Recepción: 15/05/2020 *Aceptación: 15/10/2020*

Difficultés à comprendre le concept dérivée d'une function

Résumé

La dérivée d'une fonction a été analysé par de nombreux auteurs dans le domaine de l'enseignement des mathématiques, et en général, les conclusions de leurs recherches concordent sur le fait que les élèves ont des difficultés à comprendre ce concept mathématique. En ce sens, le présent travail est basé sur la théorie APOE. Le processus de recherche dans cette théorie implique la proposition d'un modèle cognitif appelé décomposition génétique, grâce auquel un étudiant peut construire une connaissance mathématique. Il consiste en une hypothèse sur une description détaillée des constructions que les étudiants peuvent faire pour apprendre un concept. Par conséquent, l'objectif de ce travail était d'analyser les difficultés de compréhension du concept mathématique de dérivée d'une fonction dans le cadre de la théorie APOE, en présentant une proposition de décomposition génétique, afin de mener à bien la recherche. Sur le plan méthodologique, il s'agit d'une étude de cas qualitative et descriptive. À cette fin, un instrument de collecte de données a été appliqué, qui consistait en une série de questions visant à analyser si les étudiants identifient clairement le concept de dérivée d'une fonction en un point, ainsi que le concept de fonction dérivée, il a été possible de déterminer les difficultés prédominantes dans la construction du concept de dérivée, en observant que les étudiants présentent une connaissance partielle du concept, montrant des inconvénients à la fois pour encapsuler dans l'objet, le concept de fonction dérivée, et pour effectuer l'étude du comportement des fonctions, basée sur le signe de la première dérivée.
Mots clés: derivé, difficultés, APOE

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de derivada de una función ha sido analizado por numerosos autores en el campo de la Didáctica de la Matemática, y en general, las conclusiones de sus investigaciones, coinciden en que los alumnos tienen dificultades en la comprensión. Así por ejemplo Artigue, Douady, Moreno y Gómez, (1995) afirman que los estudiantes pueden desarrollar en forma más o menos mecánica cálculos de derivadas y aplicaciones a problemas sencillos, pero existen dificultades para que logren la comprensión del concepto. En el mismo sentido Berry y Nyman (2003) afirman que, en cursos introductorios de Cálculo, en general, los estudiantes no desarrollan una apreciación de los conceptos teóricos, comprobando que, para muchos de ellos, la derivación significa recta tangente o reglas de derivación.

Otras investigaciones analizan el concepto matemático de derivada de una función desde diferentes ópticas, así por ejemplo Zandieh y Knapp (2006) sostienen que el estudiante no alcanzará una comprensión completa de este concepto matemático, mientras no logre reconstruir los significados de razón, límite y función, en diferentes contextos; Harel, Selden y Selden (2006) comparten esta idea, agregando, que también es importante que lo realicen a través de otros modos de representación como son el gráfico y el analítico.

Amaya, Rojas y Ballen (2009) analizan los niveles de comprensión del concepto derivada en el marco de la teoría APOE, los resultados muestran una tendencia a interpretar este concepto matemático en términos del proceso algorítmico y también como dependencia de la expresión algebraica de la función; también Sánchez Matamorros, García y Llinares (2006) analizan el desarrollo del esquema en la comprensión del concepto de derivada, de acuerdo a los niveles que caracteriza Piaget (1992) mediante un mecanismo de pasaje de un nivel a otro denominado de abstracción reflexiva. Estos niveles o faces se denominan intra-inter-trans. El nivel intra se caracteriza por que el objeto se construye sin tener conciencia de conexiones con otros objetos y procesos, mientras en el nivel trans, ya se establecen relaciones entre distintos objetos dando lugar a los esquemas. En este contexto los autores concluyen que probablemente la posibilidad de desencapsular los significados de las ideas matemáticas conocidas como objetos, es la que está vinculada a la capacidad de establecer determinadas relaciones lógicas durante el proceso de resolución de problemas relativos a la noción de derivada, dado que la idea de “ser capaces de generar nueva información es la clave para entender la noción de síntesis piagetiana, con la que se trabaja desde esta concepción” (Sanchez Matamorros et.al, 2006, p.96). Habre & Abboud (2006), llevaron a cabo una investigación en un curso experimental de cálculo, la introducción del concepto en estudio a través de múltiples representaciones, como la geométrica a través de software dinámico. Las entrevistas realizadas con algunos estudiantes y un estudio de su desempeño en preguntas muy específicas revelan que, para la mayoría de los discentes, la representación algebraica de una función aún dominaba su pensamiento; sin embargo, estos estudiantes mostraron una comprensión casi completa de la derivada, particularmente la idea de la tasa de cambio instantáneo y la pendiente de una curva en un punto dado.

Urquieta, Yañez y Andrade (2014) motivados por el bajo rendimiento de los estudiantes que ingresan a primer ciclo en la educación superior en Chile, investigaron cómo aprenden matemáticas los estudiantes, cómo construyen conocimiento y cuál es el nivel de aprendizaje construido en un tema, de especial dificultad para ellos, como es el concepto de la derivada y sus aplicaciones. Los resultados de este trabajo indican que, si el concepto de derivada de una función en un punto no es comprendido a nivel de acción y el estudiante no reflexiona sobre él, luego tiene dificultades para extenderlo y transitar al nivel de proceso pues no es capaz de relacionar correctamente su significado y realizar la abstracción que relaciona este concepto con la definición de función derivada, observando dificultades para interpretar geométricamente el concepto.

Recepción: 15/05/2020 *Aceptación: 15/10/2020*

Se pueden citar además el trabajo de Jones (2017), un estudio sobre la comprensión del concepto de derivada en contextos no cinemáticos, Park (2013), a su vez, mostró que la mayoría de los estudiantes no lograban entender la derivada de una función en un punto como un número y la función derivada como una función. Borji, Alamolhodaei, y Radmehr, F. (2018) aplican un ciclo ACE basada en marco teórico APOS para explorar la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada y su interpretación gráfica a un grupo experimental de alumnos y se compara con un grupo control, observándose mejor interpretación del concepto por parte del grupo experimental, concluyendo asimismo la importancia del ciclo ACE utilizando un software específico. Borji, Font, Alamolhodaei y Sánchez, A. (2018) aplican combinadamente dos teorías APOS y Enfoque Ontosemiótico para el análisis de la comprensión de la gráfica de una función y su derivada. Se observaron dificultades para dibujar la gráfica de f´ cuando se les da la gráfica de f, como así también para desarrollar construcciones mentales y realizar el trabajo práctico necesario para la resolución del problema, en particular en los puntos críticos de la función y determinar la velocidad de variación de la inclinación de las rectas tangentes a f, razón por la cual la mayoría solo logra construir un nivel intra del desarrollo del esquema.

En virtud de lo anteriormente citado es posible deducir que la mayoría de los autores observa dificultades en la comprensión del concepto de derivada de una función, estas no se reducen solamente a la aplicación de reglas algebraicas o algorítmicas, sino también presentan inconvenientes para encontrar la función derivada o la recta tangente a una función en un punto de su dominio.

Reflexionando sobre estas ideas surge la siguiente pregunta: ¿cuáles son las dificultades que se observan en los estudiantes del primer curso de Cálculo Diferencial en una variable, en la comprensión del concepto matemático derivada de una función?

Este estudio se realizó desde la perspectiva del modelo cognitivo APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) y fundada en la noción de abstracción reflexiva de Piaget sobre el pensamiento matemático avanzado, al utilizar nuevas estrategias de enseñanza. Por ello, basándonos en esta teoría, es que el objetivo del presente trabajo es analizar las dificultades en la comprensión del concepto matemático de derivada en el marco de la teoría APOE.

Nuestra experiencia en la Cátedra refleja que los estudiantes, al terminar de cursar la asignatura, en general, logran un dominio aceptable de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas, pero difícilmente comprenden el significado de estos procedimientos. Conocer cuáles son las dificultades que presentan los alumnos en la comprensión del concepto permitiría reformular las estrategias didácticas en busca de lograr sortearlas, iniciando un nuevo proceso cíclico de acuerdo al marco teórico que sustenta esta investigación.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Teoría APOE

Esta investigación está fundamentada en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) propuesta por Dubinsky (1991). El proceso de investigación, en esta teoría, conlleva el realizar un modelo cognitivo llamado descomposición genética, mediante el cual un estudiante puede construir un concepto matemático. Esta última, consiste en una hipótesis sobre una descripción detallada de las construcciones que los estudiantes pueden llevar a cabo para aprender un concepto. Desde el punto de vista de Dubinsky, (1991) el hecho que se implemente una secuencia didáctica en función de la descomposición genética y los datos que se obtienen, serían de utilidad para refinarla, y también para utilizarla como una guía, para llevar a cabo el diseño de nuevo material didáctico.

La teoría APOE se fundamenta en el principio de abstracción reflexiva de Piaget (1982) que describe el desarrollo del pensamiento lógico en niños, extendido a el pensamiento matemático avanzado (Dubinsky, 1991). En esta teoría se utiliza la abstracción reflexiva para describir cómo un individuo logra determinadas construcciones mentales sobre un objeto determinado. De acuerdo a Dubinsky (1996), el conocimiento matemático de un individuo, es su tendencia a responder a las situaciones problemáticas, reflexionando sobre ellas y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y tratar de organizarlos en esquemas mediantes procesos de abstracción reflexiva denominados interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión. Estas construcciones mentales y los procesos de abstracción reflexiva de describen a continuación (Asiala et. al, 1997):

> "Una acción es una transformación de objetos que el individuo percibe como algo externo al menos. Es decir, un individuo cuya comprensión de una transformación se limita a una concepción de acción puede llevar a cabo la transformación solo reaccionando a señales externas que brindan detalles precisos sobre los pasos a seguir.". (p.10).

> "Cuando una acción, o una serie de acciones se repite y el individuo reflexiona sobre ellas, se puede interiorizar en un proceso. Un individuo que tiene una concepción del proceso de una transformación puede reflexionar, describir o incluso revertir los pasos de la transformación sin realmente realizar esos pasos. A diferencia de una acción, el individuo percibe un proceso como interno y bajo el control de uno, más que como algo que uno hace en respuesta a señales externas" (p.11).

> "Cuando un individuo logra la capacidad de reflexionar sobre las operaciones aplicadas a un proceso como un todo, realiza transformaciones, ya sean acciones o procesos, que pueden actuar sobre él y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces, ha logrado encapsular este proceso en un objeto" (p.12).

Asimismo, los objetos pueden ser desencapsulados hacia los procesos a partir de los cuales fueron formados; en este tipo de abstracción se descompone el objeto encapsulado toma conciencia de las acciones y procesos que permitieron comprenderlo como un todo.

Con respecto al nivel de esquema Trigueros (2005) expresa:

> En la teoría APOE, un esquema para una parte específica de las matemáticas se define como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas (p.11).

Cuando el autor habla de coherencia, se refiere a que el estudiante ya dispone de las herramientas necesarias para decidir si alguna situación matemática se puede trabajar utilizando el esquema.

Cuando un sujeto aprende a aplicar un esquema ya existente a una gran colección de fenómenos, es cuando ese esquema ha sido generalizado. Esto puede ocurrir porque el sujeto se da cuenta de la mayor aplicabilidad del mismo; de igual modo, esto también puede ocurrir cuando un proceso es encapsulado en un objeto (Dubinsky y Mcdonald, 1991).

2.2 Propuesta de descomposición genética para la derivada

En la teoría APOE se parte de un análisis de los conceptos matemáticos, en el que se ponen de relieve las construcciones cognitivas que pueden ser requeridas en su aprendizaje. A este análisis se le conoce como descomposición genética del concepto, es decir: una descomposición genética parte del análisis de las construcciones que el sujeto hace, conforme aprende el concepto matemático, en términos de lo que es observable.

Azcárate y Camacho (2003) sugieren que, para la elaboración de la propuesta de una descomposición genética, es fundamental considerar que el proceso de comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales, previamente construidos, para formar acciones; entonces las acciones se interiorizan para formar procesos, los cuales se encapsulan para formar objetos.

Cabe aclarar que no existe una descomposición genética única, ya que esta depende de la formulación que ha hecho el investigador. “Pueden coexistir varias descomposiciones genéticas del mismo concepto en estudio”, según afirma Trigueros (2005, p.5), lo que realmente importa es que cualquier descomposición genética resulta ser un instrumento que da cuenta del comportamiento observable del sujeto.

Para el análisis que se lleva a cabo en la presente investigación, se ha tomado como referencia el trabajo de Asiala et al., (1997) que sugieren que hay dos trayectorias que se relacionan entre sí, gráfica y analítica, a partir de las cuales se construye el concepto de derivada.

Se presenta a continuación una propuesta de la descomposición genética del concepto de derivada de una función, es decir, la hipótesis en base a la cual se han analizado las producciones de los alumnos:

1.a) Gráfico: acción de trazar la recta secante determinada por los puntos $P(x, f(x))$ fijo y $Q(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ móvil, que se encuentran sobre la representación gráfica de una función dada f.

1.b) Algebraico: acción de calcular el cociente incremental entre los puntos P y Q, a medida que Q va tomando las infinitas posiciones a lo largo de la curva, hasta llegar a coincidir con P

2.a) Gráfico: Interiorizar en proceso la acción 1.a) a través de la aproximación del punto móvil Q que se desplaza a lo largo de la curva, hasta que llega a coincidir con el punto P, proceso a través del cual la recta secante va tomando distintas posiciones según se desplaza el punto Q, hasta que se transforma en la recta tangente a la curva en el punto fijo P.

2.b) Analítico: interiorización en proceso de las acciones de 1.b) para calcular el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva dada, en el punto fijo P.

3.a) Gráfico: encapsulación en objeto del proceso 2.a) para obtener la recta tangente como la posición límite de la secuencia de rectas secantes, como así también, para calcular el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva, en el punto fijo P.

3.b) Algebraico-Numérico: encapsulación en objeto del proceso 2.b) para calcular el valor de los distintos cocientes que representan las diferentes posiciones que va tomando la recta secante conforme el punto móvil Q se aproxima al punto fijo P, en un proceso que lleva implícito el concepto de limite, pues es en la posición límite de la recta secante, cuando se obtiene la recta tangente a la curva.

4. Coordinación de los procesos 2.a) y 2.b) para obtener la definición de derivada de una función en un punto como el límite del cociente incremental en dicho punto cuando Δx tiende a cero siempre que ese límite exista.

5. Interpretación gráfica de la derivada de una función en un punto: la derivada de una función en un punto se interpreta gráficamente como la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

6. Interiorización, en proceso la acción de calcular la derivada de una función en un punto de abscisa $x=a$, que proporciona como resultado, el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto.

7. Encapsulamiento, en objeto, del proceso descripto anteriormente para dar origen a una nueva función, que es la función derivada. Esto también incluye la determinación de los puntos críticos, y el establecimiento de los valores extremos, en caso de existir, lo cual, por medio del estudio de intervalos de crecimiento y decrecimiento, se llega al trazado aproximado de la función f.

3. METODOLOGÍA

3.1 Tipo de Estudio y Muestra

Se trata de un estudio de casos, de carácter descriptivo y metodología cualitativa. La investigación desde el punto de vista temporal es transversal, es decir que se recolectan datos en un momento único, que para este caso corresponde al momento de finalizado del cursado de la asignatura. Cabe mencionar que la promoción de este primer curso de Cálculo Diferencial en una variable se realiza por examen final, luego de finalizar el cursado, la condición del alumno es de regular o libre, en el primer caso ha cumplimentado los requisitos de trabajos prácticos y evaluaciones parciales en forma satisfactoria, mientras que en caso negativo se trata de un alumno en condición de libre.

Para ello se ha seleccionado una muestra de tres estudiantes que han concluido el cursado de la asignatura en condición de alumno regular, y de los cuales solo uno ha logrado hasta el momento la promoción por examen final. La muestra se ha seleccionado teniendo en cuenta alumnos de distinto rendimiento académico durante el cursado y se ha elegido como método de investigación el Estudio de Casos, ya que este, ayuda a conocer y comprender la particularidad de una situación lo que a su vez permite mejorar a futuro el proceso de enseñanza y aprendizaje.

3.2 Instrumento de recolección de datos

El instrumento de recolección de datos, consistió en un cuestionario de cinco ítems que se aplicó en una sola vez a los alumnos participantes de la investigación. Los alumnos fueron informados del objetivo del cuestionario, lo respondieron simultáneamente en forma presencial, sin límite de tiempo. Los ítems han sido desarrollados en función de las construcciones mentales que un estudiante debería realizar para desarrollar la comprensión del concepto en de acuerdo a la descomposición genética propuesta y se describen a continuación:

ITEM 1 - Dada la siguiente función, se pide determinar la ecuación de la recta tangente a $f(x) = 2x^2+1$ en $x=-2$, graficar la función f(x) y su recta tangente.

Permite corroborar, si para una función dada, el estudiante interpreta y puede graficar la recta tangente, a partir de la obtención de su pendiente. El alumno debe haber interiorizado en un proceso la acción de calcular la pendiente de la recta tangente a una función en un punto.

ITEM 2 - Calcule la función derivada, utilizando la definición: $f(x)=mx^2+bx$

En este ítem el alumno debe coordinar el camino gráfico y el camino analítico del concepto de derivada de una función en un punto como el límite del cociente incremental, dando lugar a una nueva acción que consiste en calcular la derivada de una función en un punto de su dominio Acá están incluidas las acciones 1a y 1b que ya se deben haber interiorizado en procesos, es decir que el alumno puede determinar la pendiente de la recta secante como el cociente incremental $\Delta y/\Delta x$. La recta secante se transforma en tangente cuando $\Delta x \to 0$, por lo tanto, debe calcular el límite del cociente incremental cuando $\Delta x \to 0$. Este ítem requiere la coordinación de los caminos analíticos y gráficos de la definición de recta secante a una función y la acción de calcular la derivada de una función en un punto.

El criterio fue trabajar estos ítems de forma conjunta, de manera de poder determinar si el cálculo de la pendiente de la recta tangente a una función en un punto se realizó algorítmicamente o se había interiorizado en un proceso, lo que implicaría comprender la definición formal de derivada.

ITEM 3 - Analice para qué funciones se verifica que su derivada en $x = x_0$ es nula y trace la recta tangente a la curva en el punto donde su derivada es nula.

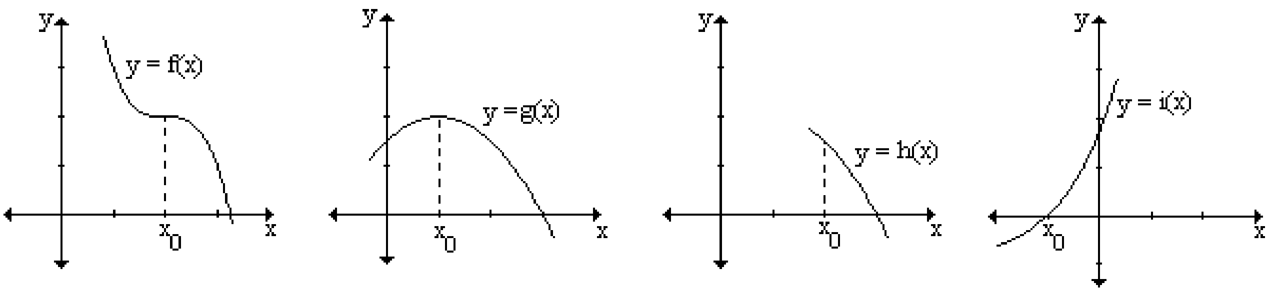


Figura 1: gráficos correspondientes al ítem 3 del instrumento de recolección de datos.

Objetivo: comprobar si el estudiante ha encapsulado en objeto el proceso de determinar la función derivada f′, en cuanto a lo que significan los signos para la misma, y en base a ello, determinar si logra graficar la recta tangente en el punto en el que la derivada se anula, como una recta paralela al eje de las abscisas, lo que corresponde a la etapa 7 de la descomposición genética.

ITEM 4- ¿En qué gráficas se cumple que $f'(x) < 0$? ¿Cómo se comporta la función en ese intervalo? Justifique

Recepción: 15/05/2020 Aceptación: 15/10/2020

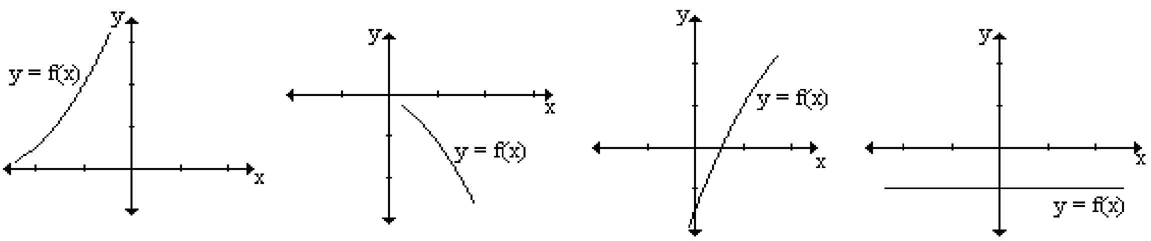


Figura 2: Gráficos correspondientes al ítem 4 del Instrumento de recolección de datos.

ITEM 5 - Indique el signo de la derivada primera en todo el dominio de la función y en base a ello, indicar el comportamiento de la misma.

Estos dos últimos ítems, junto con el ítem 3, permiten comprobar si se ha logrado encapsular en objeto el proceso de calcular la función derivada f´, analizando los intervalos donde es positiva, negativa y los puntos donde es nula, relacionando estos valores con los correspondientes intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f, en sus puntos críticos respectivamente, lo que corresponde a la etapa 7 de la descomposición genética propuesta

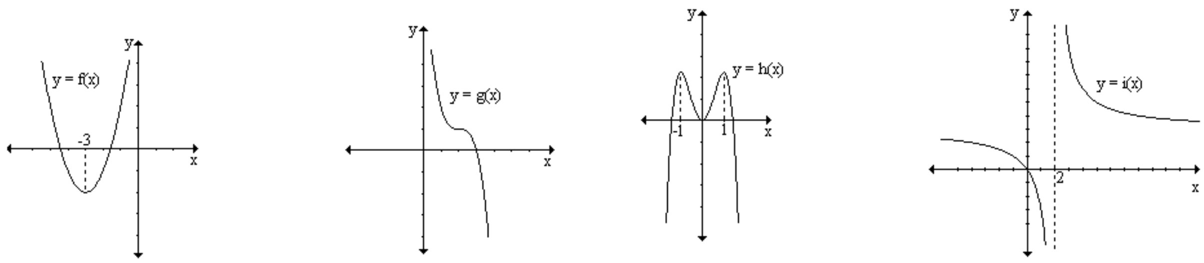


Figura 3: gráficos correspondientes al ítem 5 del Instrumento de recolección de datos.

4. RESULTADOS

A los efectos del análisis de la producción de los alumnos, se han considerado siete situaciones, de acuerdo con el instrumento de recolección de datos:

A – Determinan la pendiente de la recta tangente a una función en un punto dado.

B – Determinan la ecuación de la recta tangente a una función en un punto dado.

C – Grafican la recta tangente a una función en un punto determinado.

D – Determinan la pendiente de la recta secante a una función por los puntos de abscisa x y x+Δx.

E – Calculan lim (Δy/Δx) cuando Δx → 0, esto es, determinan la derivada de una función, empleando su correspondiente definición.

F – Identifican en que puntos del dominio de una función f, la derivada f´ es nula.

G – Relacionan el signo de la derivada primera con los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

Las actividades descriptas surgen de los ítems del cuestionario, así por ejemplo las actividades A, B, C surgen del primer ítem, D y E del segundo ítem, F del tercero, y G del cuarto y quinto. Consideramos que analizar en menor escala algunos de los ítems permiten determinar con mejor precisión los puntos donde se les presentan dificultades a los alumnos, como así también nos brinda la posibilidad de observar los procesos internos que se producen en los estudiantes, cuando se realiza un análisis más exhaustivo y detallado, que es posible llevar a cabo, en base a sus producciones y situaciones problemáticas según lo solicitado en cada enunciado. Las respuestas a cada una de estas situaciones han sido codificadas de la siguiente manera:

√ - Respuesta correcta.

X – Respuesta incorrecta.

El casillero vacío indica que el alumno no respondió a la situación.

En Tabla N° 1 se presentan los resultados de estas situaciones para cada uno de los tres alumnos de la muestra, que se han identificado como A1, A2 y A3 reservándose la identidad de los mismos:

SITUACIÓN	ALUMNO A1	ALUMNO A2	ALUMNO A3
A	√	√	√
B	√	√	√
C	√	√	√
D	√	√	X
E	X	√	-
F	X	√	√
G	X	X	X

Tabla 1: Resultados de las producciones de alumnos A1, A2, A3

En función de estos resultados se presentan para los estudiantes de la muestra el análisis correspondiente:

Alumno A1: el alumno aplica correctamente el algoritmo para la determinación de la pendiente de la recta tangente a una función dada en un punto de su dominio, la ecuación correspondiente, y ha realizado su gráfica.

No ha logrado comprender la definición de derivada, pues, si bien calcula correctamente el cociente incremental, no calcula el límite tal como se observa en Figura 4. Identifica de modo parcial el signo de f´(x), en consecuencia, no analiza en forma correcta los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función f(x).

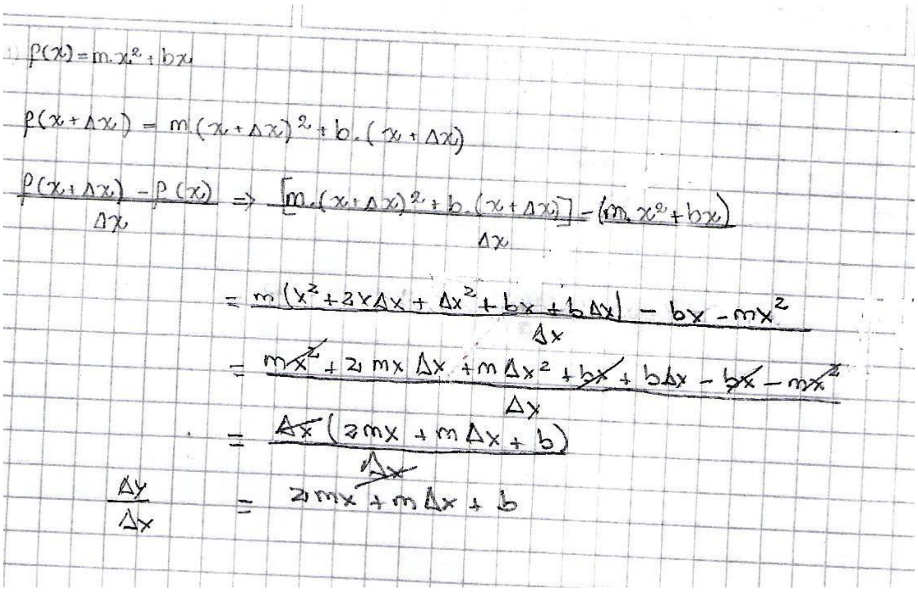


Figura 4: Producción del alumno A1. Situaciones D, E.

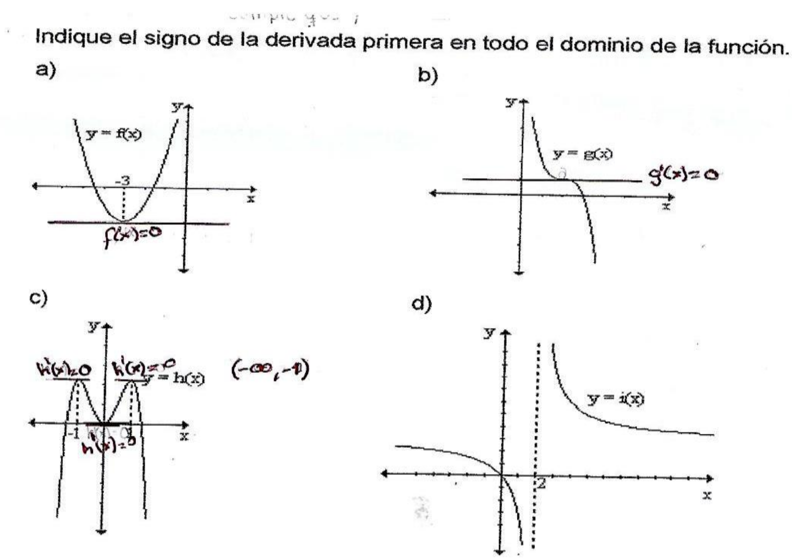
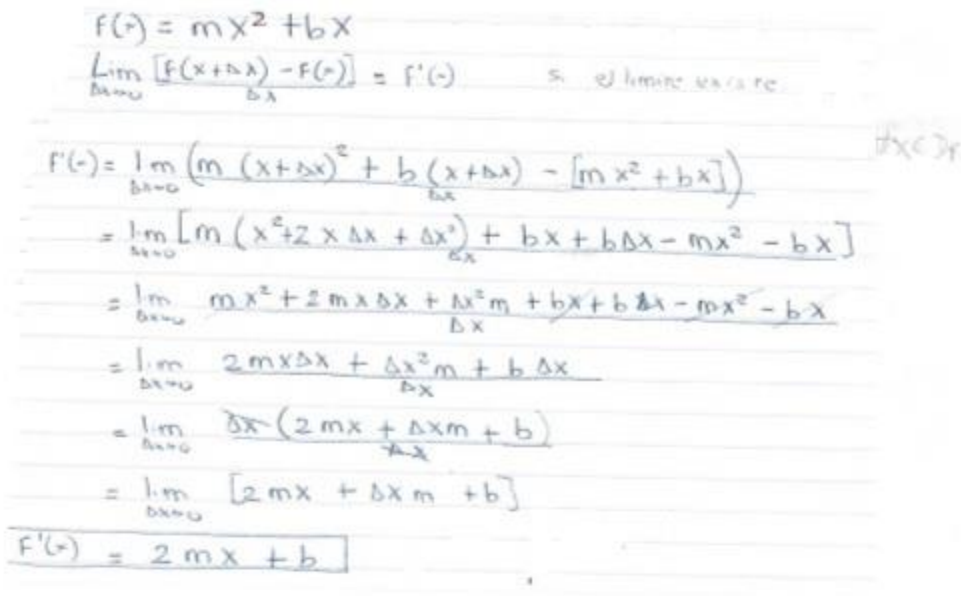


Figura 5: Producción del alumno A1. Situación F.

La mayor dificultad se observa en establecer la relación entre las funciones f y f´, lo que se puede observar en la Figura 5, pues solo indica los puntos donde la recta tangente es nula, no respondiendo en que intervalos la función derivada es positiva o negativa como se solicitaba en el enunciado correspondiente. De acuerdo a la descomposición genética propuesta se considera que el alumno tiene un conocimiento parcial del tema, no logrando encapsular en objeto, el proceso de cálculo de la derivada de una función, la determinación de la función derivada ni su relación con f.

Alumno A2: este alumno ha realizado correctamente las actividades A, B, C, D, E, F lo que implica que puede calcular la derivada de una función utilizando la definición como se observa en Figura 6, también obtiene la pendiente de la recta tangente a una función en un punto, lo que implica que ha interiorizado en proceso la acción de calcular derivada de una función en un punto que corresponde a la Etapa 6 de la descomposición genética propuesta.



$$f(x) = mx^2 + bx$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} = f'(x) \quad \text{si el límite existe}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) - [mx^2+bx]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[m(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2) + bx + b\Delta x - mx^2 - bx]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{mx^2 + 2mx\Delta x + \Delta x^2 m + bx + b\Delta x - mx^2 - bx}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2mx\Delta x + \Delta x^2 m + b\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2mx + \Delta x m + b)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [2mx + \Delta x m + b]$$

$$\boxed{f'(x) = 2mx + b}$$

Figura 6: Producción de Alumno A2. Situaciones D, E.

La actividad G no la realiza correctamente en su totalidad al identificar parcialmente el signo de la derivada primera f´(x) En Figura 7 se observa por ejemplo, que para el gráfico "a" identifica correctamente el valor del dominio de la función, donde su derivada es nula, pero afirma que f´(x) > 0 para todo el dominio de f(x), lo que no es correcto. En el caso del gráfico "b" lo analiza en forma correcta, luego en el gráfico "c" y "d" no indica los signos de la derivada, lo que a nuestro entender muestra, que si bien no tiene dificultades para identificar los puntos del dominio de una función donde la derivada es nula, sí las tiene en el caso de establecer las relaciones entre las funciones f(x) y f´(x). Esto indicaría que no ha logrado encapsular en un objeto el proceso de determinación de la derivada de una función.

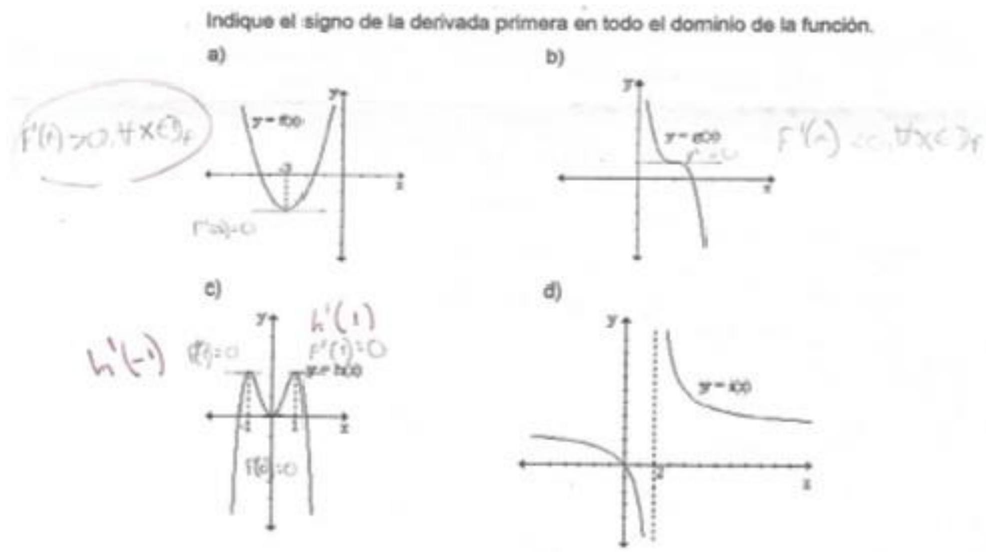


Figura 7: Producción de Alumno A2. Situaciones F.

Recepción: 15/05/2020 Aceptación: 15/10/2020

Alumno A3: resuelve correctamente las actividades A, B, C. lo que implica que determina correctamente la recta tangente a la función en un punto, calculando en primer lugar, la pendiente de la misma, en x=a como f´(a) y traza las gráficas de la función y de su correspondiente recta tangente de acuerdo a lo que se observa en Figura 8.

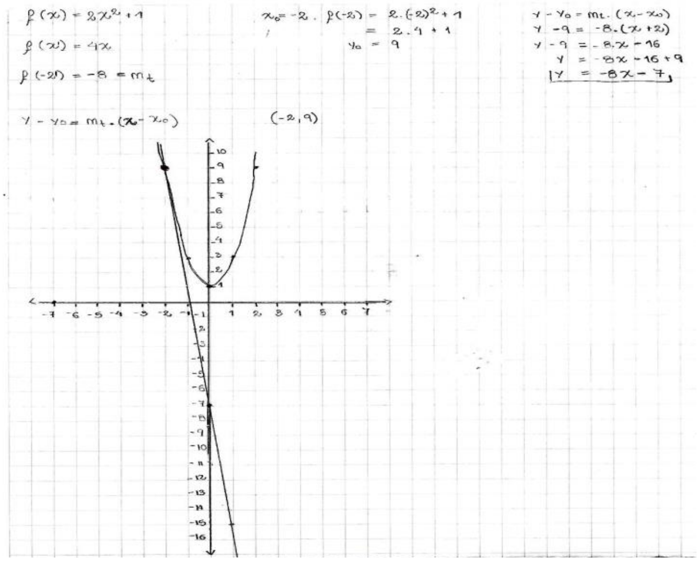


Figura 8: producción de alumno A3. Situaciones A, B, C.

Se observaron dificultades para determinar la derivada de una función utilizando la definición, incluso para la obtención del cociente incremental, que corresponde a las actividades D y E como se muestra en la Figura 9:

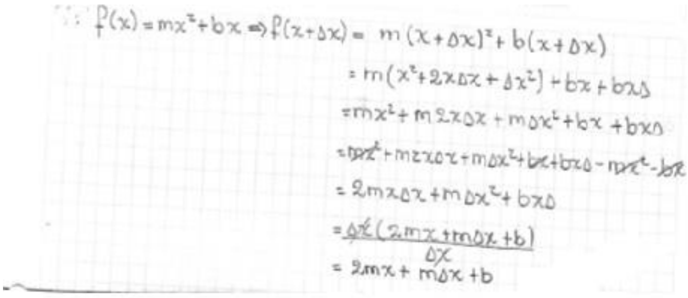


Figura 9: Producción de Alumno A3. Situaciones D, E.

Con respecto a la función derivada, identifica correctamente el signo de la primera derivada en lo concerniente a crecimiento y decrecimiento de la función f(x) solamente en el caso de la gráfica "b", no respondiendo en los otros casos de acuerdo a lo que se observa en Figura 10, que corresponde a la actividad denominada G.

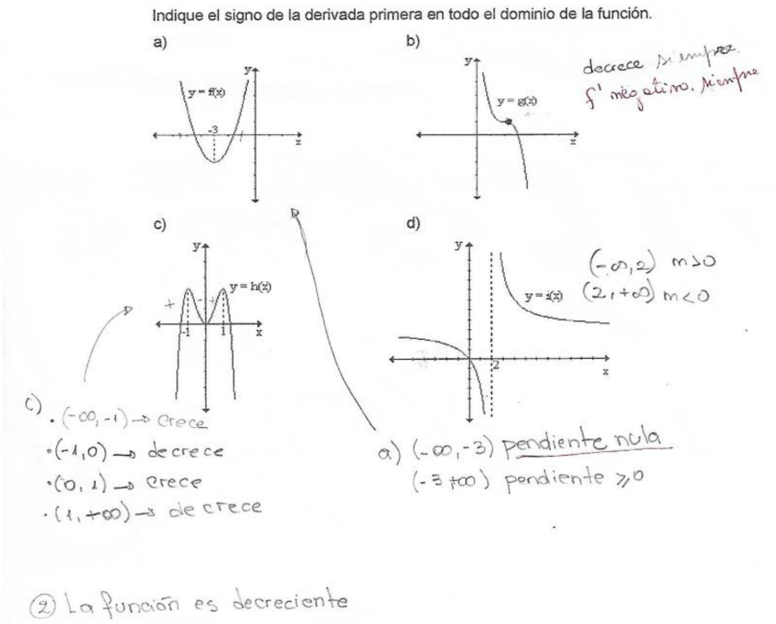


Figura 10: Producción de Alumno A3. Situación G

De acuerdo a la descomposición genética propuesta este alumno tiene mayores dificultades de comprensión del concepto de derivada de una función, pues no logra coordinar los caminos gráficos y analíticos de la definición de derivada de una función, es decir que no ha logrado interiorizar en proceso la acción de calcular la derivada de una función en un punto utilizando la definición.

De acuerdo con los resultados descriptos, se observa que ninguno de los tres estudiantes han presentado dificultad alguna para determinar, dada la función en su expresión algebraica, la pendiente de la recta tangente a una función en un punto, situación en la que han aplicado las técnicas de derivación correctamente como así también han obtenido la ecuación de la recta tangente a la función en ese punto y realizaron su grafica respectiva tal como se les ha solicitado.

De la muestra seleccionada, es posible destacar que dos de los estudiantes, A1 y A3 no han logrado aplicar correctamente la definición formal del concepto derivada de una función en un punto. Los mismos estudiantes no lograron realizar los Ítems referidos al concepto de función derivada, en lo que respecta al signo de la misma, y su correspondiente relación con intervalos de crecimiento y decrecimiento, que incluye implícitamente, trazar la recta tangente a la gráfica de una función dada, lo que se podría resumir indicando que no han podido resolver los ítems que tienen que ver con las aplicaciones de la primera derivada.

De acuerdo al proceso de investigación descripto en la teoría APOE, en esta primera etapa y fundado en la descomposición genética propuesta, se ha podido determinar cuáles son las dificultades predominantes en la construcción del concepto matemático derivada, observándose que dos de los tres estudiantes presentan conocimientos parciales del concepto, mostrando inconvenientes en la coordinación de los caminos gráfico y analítico, lo que nos permite inferir que no han interiorizado en proceso la acción de calcular la derivada de una función en un punto.

El tercer alumno ha relacionado gráficamente la función y su derivada lo cual, según nuestro criterio ha logrado, encapsular en proceso la derivada de una función, ya que identifica correctamente los puntos de derivada nula y relaciona signos de f´ con intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).

5. CONCLUSIONES

De acuerdo al proceso de investigación descripto en la teoría APOE, en esta primera etapa y fundado en la descomposición genética propuesta, se ha podido determinar cuáles son las dificultades predominantes en la construcción del concepto matemático derivada de una función, observándose que dos de los tres estudiantes presentan conocimientos parciales del concepto, mostrando inconvenientes tanto para coordinar los caminos gráfico y analítico de la derivada de una función en un punto, como así también para encapsular en objeto el proceso de determinación de la función derivada, y para llevar a cabo el estudio del comportamiento de funciones en lo referente a intervalos de crecimiento, decrecimiento. El tercer alumno ha podido relacionar gráficamente la función f(x) y su derivada, es decir, que a pesar de haber tenido dificultades con la determinación de la derivada aplicando la definición formal ha logrado, a nuestro criterio, la encapsulación en objeto del proceso que implica la determinación de la derivada de una función, identificando correctamente f´(x) como una nueva función, relacionando la función dada con su derivada, y reconociendo puntos de derivada nula, como así también intervalos de derivada positiva o negativa.

Estos resultados en general son coincidentes con otras investigaciones de la temática en el sentido de que tienen dificultades para la interpretación del concepto, y que prevalecen procedimientos algorítmicos para la resolución de problemas sencillos, donde sólo es necesario aplicar reglas de derivación. En el caso de dificultades en determinación de la derivada de una función aplicando su definición, que se evidencia en dos alumnos de la muestra, puede ser consecuencia de no haber logrado conceptualización del límite de una función, siendo necesario, desde nuestro punto de vista, profundizar la investigación en esta etapa del proceso de aprendizaje de la derivada de una función en un punto.

6. REFERENCIAS

Artigue M. (1995): La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, en Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (eds.) *Ingeniería didáctica en educación matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica: México, pp. 97-140.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Maa Notes*, 37-54.

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10 (2), 135-149

Berry, J. S., & Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(4), 479-495. ISSN 0732-312. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.006

Borji, V., Alamolhodaei, H., & Radmehr, F. (2018). Application of the APOS-ACE Theory to improve Students' Graphical Understanding of Derivative. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(7). ISSN 2947-2967. https://doi.org/10.29333/ejmste/91451

Borji, V., Font, V., Alamolhodaei, H., & Sánchez, A. (2018). Application of the Complementarities of Two Theories, APOS and OSA, for the Analysis of the University Students' Understanding on the Graph of the Function and its Derivative. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(6). ISSN 2301-2315. https://doi.org/10.29333/ejmste/89514

Dubinsky, E. (1991), 'Reflective abstraction in advanced mathematical thinking', in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 95–123.

Dubinsky, E. (1996) Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación matemática*, 8(3), 24-41.

Dubinsky E., Mcdonald M.A. (2001) APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In: Holton D., Artigue M., Kirchgräber U., Hillel J., Niss M., Schoenfeld A. (eds) *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. New ICMI Study Series, vol 7. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_25

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 57-72. ISSN 0732-3123. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.11.004

Harel, G.; Selden, A. y Selden J. (2006), "Advanced Mathematical Thinking. Some PME Perspectives", en A. Gutiérrez y Boero, P. (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. Post Present and Future, Rotterdam, Sense Publishers, pp. 147-172.

https://www.researchgate.net/publication/256496038_Advanced_Mathematical_Thinking_Some_PME_Perspectives

Jones, S. R. (2017). An exploratory study on student understandings of derivatives in real-world, non-kinematics contexts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *45*, 95-110. ISSN 0732-3123, https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.11.002.

Kú, Darly, & Trigueros, María, & Oktaç, Asuman (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2),65-89. ISSN: 0187-8298. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=405/40512062004

Park, J. (2013). Is the derivative a function? If so, how do students talk about it? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 624-640. ISSN: 0020-739X. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.795248

Piaget, J., & García, R. (1983). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo XXI.

Salazar, C., Díaz, H. y Bautista, M. (2009). Descripción de niveles de comprensión del concepto derivada. *Tecné, episteme y didaxis: Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología*, (26), 62-82. ISSN: 0121-3814 e-ISSN: 2323-0126. https://doi.org/10.17227/ted.num26-421

Sánchez-Matamoros, Gloria, Mercedes, García, & Llinares, Salvador. (2013). Algunos indicadores del desarrollo del esquema de derivada de una función. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 27(45), 281-302. ISSN 1980-4415 https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000100014

Trigueros, María (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1),5-31. ISSN: 0187-8298. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=405/40517101

Urquieta, M. Angélica Vega, Yañez, José Carrillo, & Andrade, Jorge Soto. (2014). Análisis según el modelo cognitivo APOS* del aprendizaje construido del concepto de la derivada. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 403-429. ISSN 1980-4415. https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a20.

Zandieh, M. J., & Knapp, J. (2006). Exploring the role of metonymy in mathematical understanding and reasoning: The concept of derivative as an example. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 1-17. ISSN 0732-3123. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.11.002.

Nora Elisa Pereyra

Magister en docencia universitaria de Disciplinas Tecnológicas, Especialista en Metodología de la Investigación, Profesora y Licenciada en Matemática. Profesor Titular del Departamento Matemática y Estadística, de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Catamarca, Líneas de investigación: Enseñanza de la Matemática.