

Uma estratégia de Avaliação de Atividades de Modelagem Matemática

Karina Alessandra Pessoa da Silva¹, Jader Otavio Dalto²

karinasilva@utfpr.edu.br, jaderdalto@utfpr.edu.br

¹Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Londrina - Brasil

²Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Cornélio Procópio - Brasil

Resumo

Neste trabalho apresentamos resultados de uma pesquisa na qual elaboramos e aplicamos uma estratégia de avaliação de atividades de modelagem matemática desenvolvidas em sala de aula. A pesquisa está fundamentada nos pressupostos teóricos da modelagem matemática na Educação Matemática e da Avaliação enquanto estratégia de ensino e aprendizagem. A estratégia de avaliação foi elaborada segundo as fases associadas ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Essa estratégia foi validada e aplicada em atividades de modelagem desenvolvidas por sete grupos de alunos de um curso de Licenciatura em Química na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1 de uma universidade pública do Brasil. Com a aplicação da estratégia de avaliação evidenciamos a praticidade da mesma tanto no sentido qualitativo quanto quantitativo, destacando a necessidade de ajustes de acordo com as características das atividades desenvolvidas.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Avaliação; Instrumento de avaliação.

Una estrategia de evaluación de actividades de Modelaje Matemático

Resumen

En este trabajo se presentan los resultados de una investigación en la que hemos desarrollado y aplicado una estrategia para la evaluación de las actividades de modelaje matemática en el aula. La investigación se basa en supuestos teóricos de los modelos matemáticos en educación matemática y la evaluación como una estrategia de enseñanza y aprendizaje. La estrategia de evaluación se desarrolló de acuerdo con las fases asociadas con el desarrollo de las actividades de modelaje matemática. Esta estrategia fue validada y aplicada en actividades de modelaje desarrolladas por siete grupos de estudiantes que cursaban Cálculo Diferencial e Integral correspondiente a la carrera Licenciatura en Química de una Universidad pública Brasil. Con la implementación de la estrategia de evaluación se señaló la practicidad tanto en el sentido cualitativo y cuantitativo, destacando la necesidad de ajustes en función de las características de las actividades.

Palabras clave: Modelaje Matemático; Evaluación; Herramienta de evaluación

An assessment strategy for Mathematical Modelling activities

Abstract

In this paper, we present results from a research that have developed and applied a strategy for assessing mathematical modelling activities in the classroom. The research is based on theoretical assumptions of mathematical modelling in mathematics education and assessment as a teaching and learning strategy. The assessing strategy was developed according to the phases associated with the development of mathematical modelling activities. This strategy was validated and applied modelling activities developed by seven groups of students in a course in a course of Differential and Integral Calculus 1 from Chemistry Undergraduate course from a public university in Brazil. With the implementation of the assessment, strategy noted the practicality on both the qualitative and quantitative sense, highlighting the need for adjustments in accordance with the characteristics of activities.

Keywords: Mathematical Modelling; Assessment; Assessment tool.

Une stratégie d'évaluation de activités de Modelage Mathématique

Résumé

Dans ce travail, nous présentons les résultats d'une recherche dans lequel nous avons développé et appliqué une stratégie d'évaluation des activités de modélisation mathématique en classe. La recherche est basée sur des hypothèses théoriques de la modélisation mathématique dans l'enseignement des mathématiques et de l'évaluation en tant que stratégie d'enseignement et d'apprentissage. La stratégie d'évaluation a été élaborée en fonction des phases liées au développement des activités de modélisation mathématique. Cette stratégie a été validée et appliquée validé et appliqué les activités de modélisation mis au point par sept groupes d'élèves qui suivaient un cours du Calcul Différentiel et Intégrale correspondante à la carrière de Licenciatura en Chimie d'une Université publique du Brésil. Avec l'application de la stratégie d'évaluation, nous avons montré la praticabilité de la même au niveau qualitatif et quantitatif, soulignant le besoin d'ajustements en fonction des caractéristiques des activités développées.

Mots clés: Modelage Mathématique; Évaluation; Outil d'évaluation.

1. INTRODUÇÃO

Avaliar a aprendizagem de seus alunos é uma tarefa tão importante para o professor quanto a tarefa de ensinar. No que se refere à tarefa de ensinar matemática, a Modelagem Matemática tem sido defendida como uma estratégia promissora, uma vez que, dentre outras coisas, desperta o interesse dos alunos, motivando-os para a compreensão e a transformação da realidade na qual estão inseridos (Bassanezi, 2002).

Considerando que a dinâmica de uma aula de matemática na estratégia da modelagem matemática difere daquela presente em uma aula tradicional, espera-se que a avaliação em modelagem seja condizente com a dinâmica das aulas nesta estratégia.

Em um levantamento bibliográfico da produção científica brasileira e internacional acerca da avaliação em Modelagem Matemática no período de 2001 a 2013, Veleda e Burak (2016) encontraram cinco trabalhos de teses e dissertações que tratam sobre o tema. Para os autores, este número inexpressivo de trabalhos enfatiza a necessidade de se ampliar o debate sobre este tema. Em nível internacional, a discussão sobre avaliação e modelagem matemática surge relacionada ao desenvolvimento de competências de modelagem nas discussões promovidas pelo ICTMA – International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (Kaiser & Brand, 2015).

Dentre as pesquisas relatadas na literatura brasileira, Borba, Meneghetti & Hermini (1999) propõem cinco critérios para a avaliação de uma atividade de modelagem matemática, sendo que três deles relacionam-se a atitudes dos alunos em relação ao desenvolvimento da atividade e dois deles a atitudes do professor.

A partir de três dos critérios de Borba, Meneghetti & Hermini (1999), relacionados à atividade do aluno, Figueiredo & Kato (2012) e Figueiredo (2013), procuram estabelecer parâmetros para avaliar a aprendizagem

significativa dos alunos em atividades de Modelagem Matemática. Tais parâmetros são:

Parâmetro 1: o aluno, ao se deparar com uma situação nova, deve ser capaz de criar relações entre as características do desconhecido (novo) e aquilo que ele já sabe, *essas relações podem ser observadas por meio de elementos do pensamento criativo, tais como fluência, originalidade e complexidade.*

Parâmetro 2: após a atividade de modelagem matemática o aluno deve ser capaz de discernir o conceito matemático de sua aplicação nesse contexto. *Mais ainda, o aluno deve compreender que a utilização desse conteúdo extrapola aquele mobilizado na atividade.*

Parâmetro 3: o aluno deve conseguir perceber a atividade de Modelagem Matemática como parte da realidade, *relacionar criticamente a matemática envolvida no problema proposto, perceber sua importância para a sociedade e, utilizando o trabalho realizado, repensar sobre a situação nos seus vários aspectos* (Figueiredo, 2013, p. 51, grifo da autora).

Entendemos que os parâmetros estabelecidos por Figueiredo & Kato (2012) e Figueiredo (2013) avaliam muito mais os efeitos da atividade de modelagem matemática na aprendizagem dos alunos do que a atividade de modelagem matemática em si.

Consideramos que, para avaliar a atividade de modelagem matemática, é preciso considerar a dinâmica da atividade, quando desenvolvida em sala de aula, de forma a atribuir-lhe uma nota que seja condizente a ela.

Neste contexto, defendemos a necessidade de elaborar e implementar critérios de pontuação que leve em consideração aspectos qualitativos do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Em nossa investigação, inspirados na escala holística focada, proposta por Charles, Lester & O'Daffer (apud Ponte et al. 1997), elaboramos e implementamos critérios para a

avaliação de atividades de modelagem matemática desenvolvidas por estudantes de um curso de Licenciatura em Química de uma universidade pública brasileira. Entendemos que o foco de nossa investigação está alicerçado em *como avaliar uma atividade de modelagem matemática desenvolvida na sala de aula quando esses critérios se fazem presentes*.

Para tanto, apresentamos a seguir uma caracterização da Modelagem Matemática na Educação Matemática, explicitando a dinâmica do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática e algumas considerações sobre avaliação da aprendizagem.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Modelagem Matemática na Educação Matemática

Na Educação Matemática existe uma pluralidade de caracterizações para Modelagem Matemática. Em nossa pesquisa adotamos a modelagem como busca de solução para um problema originário de uma situação associada à realidade (Almeida & Brito, 2005).

Considerando que esta busca pode ser realizada no âmbito de aulas de matemática, a modelagem matemática pode ser entendida como uma atividade na qual fazemos a abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema, de forma geral, fora do contexto matemático. Isso possibilita viabilizar uma leitura, ou até mesmo uma interpretação de fenômenos do mundo ou da vida com o apoio da matemática.

Nesse sentido, são atividades que têm como ponto de partida uma situação inicial (problema) e como ponto de chegada uma situação final (solução para o problema). No *caminhar* da situação inicial para a final são utilizados procedimentos que definem estratégias de ação do sujeito envolvido com a atividade. Almeida, Silva & Vertuan (2012) identificam elementos que, de modo geral, se fazem presentes em atividades de modelagem. Segundo os autores,

[...] o início é uma situação-problema; os procedimentos de resolução não são predefinidos e as soluções não são previamente conhecidas; ocorre a investigação de um problema; conceitos matemáticos são introduzidos ou aplicados; ocorre a análise da solução (Almeida; Silva & Vertuan, 2012, p. 17).

Esses elementos que caracterizam uma atividade de modelagem aproximam o aluno de uma atividade investigativa. A atividade investigativa segue a caracterização denotada por Borges (2002), que considera atividades prático-experimentais propostas aos alunos e que envolvem a resolução de problemas mal definidos e pouco estruturados. A resolução desse tipo de problema não ocorre por meio da aplicação de procedimentos pré-definidos; suas respostas não são conhecidas pelos alunos, e às vezes, nem por seus professores. Os alunos são desafiados a encontrar formas para coletar dados e informações que os ajudem a propor soluções razoáveis.

Considerando esta característica investigativa de atividades de modelagem matemática, Almeida & Silva (2012) destacam a necessidade dos próprios alunos, a partir de uma situação-problema não-matemática, fazerem a associação com conceitos e/ou procedimentos matemáticos capazes de conduzir a uma solução para o problema e possibilitar a sua análise. Os conceitos e procedimentos matemáticos se fazem presentes por meio de representação matemática que pode ser expressa por símbolos, diagramas, gráficos, expressões algébricas ou geométricas, a qual denominamos modelo matemático.

De forma geral, para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática há a formulação de um problema e a definição de metas para sua resolução, a definição de variáveis e hipóteses, a formulação de previsões e a apresentação de explicações e respostas para a situação em estudo bem como a comunicação destas respostas e/ou explicações para outros. Esse encaminhamento envolve o que pesquisadores da área chamam de *fases da modelagem matemática* (Borromeo Ferri, 2006, Stillman; Brown & Galbraith, 2010, Sekerák, 2010, Almeida; Silva & Vertuan, 2012, Stillman; Brown & Geiger, 2015, Greefrath, 2015). Em nossa pesquisa, fundamentamos o encaminhamento das atividades de modelagem seguindo as fases propostas por Almeida, Silva & Vertuan (2012), quer sejam *inteiração*, *matematização*, *resolução*, *interpretação de resultados* e *validação*.

A *inteiração* corresponde ao primeiro contato com a situação-problema que se pretende estudar. É a busca por informações que possibilitam vislumbrar o problema a ser estudado, bem como as metas que orientam a sua resolução. O problema a ser estudado deve estar estruturado para o desenvolvimento da atividade de modelagem. No entanto, a *inteiração* não é limitada pela definição do problema, pois se houver necessidade de resgatar ou buscar novas informações para o *deslanchar* da atividade, o aluno pode se inteirar do que se propôs a estudar.

A situação-problema identificada e estruturada na fase de *inteiração*, de modo geral, se apresenta em linguagem natural e não parece diretamente associada a uma linguagem matemática e, assim, gera-se a necessidade da transformação de uma representação (linguagem natural) para outra (linguagem matemática). A busca e a elaboração de uma representação matemática são mediadas por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente estas características. Daí que a segunda fase da modelagem matemática é caracterizada por *matematização*, considerando estes processos de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas. Estas descrições são realizadas a partir de formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações em relação às informações e ao problema definido na fase de *inteiração*.

A *resolução* consiste na construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes desta situação, responder às perguntas formuladas sobre o problema a ser

investigado na situação e, mesmo, em alguns casos, viabilizar a realização de previsões para o problema em estudo.

A interpretação dos resultados indicados pelo modelo implica na análise de uma solução para o problema. A análise da solução constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica em uma validação da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto a adequação da representação para a situação.

As fases de desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática caracterizadas por Almeida, Silva & Vertuan (2012) constituem procedimentos necessários para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem. Elas podem não ocorrer de forma linear, pois a dinamicidade deste tipo de atividade possibilita movimentos de ida e volta.

Levando em consideração que essas fases orientam o desenvolvimento de atividades de modelagem e que podem ser acompanhadas pelo professor em sala de aula é que nos propomos a elaborar uma estratégia para avaliá-las.

2.2. Avaliação da aprendizagem

Nosso entendimento sobre avaliação vai ao encontro da definição apresentada por Sacristán (1998). Para ele, avaliação pode ser entendida como

(...) qualquer processo por meio do qual alguma ou várias características de um aluno/a, de um grupo de estudantes, de um ambiente educativo, de objetivos educativos, de materiais, professores/as, programas, etc., recebem a atenção de quem avalia, analisam-se e valorizam-se suas características e condições em função de alguns critérios ou pontos de referência para emitir um julgamento que seja relevante para a educação (Sacristán, 1998, p. 298).

Na definição apresentada pelo autor, fica evidente que a avaliação tem, como um de seus propósitos, contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem na escola. Nesta direção, de acordo com Hadji (1994), o papel da avaliação é compreender a situação do aluno de modo a regular os processos de ensino e de aprendizagem. Quando realizada sob este propósito, Hadji (1994) considera que este tipo de avaliação é formativa. Além deste propósito, o autor apresenta que a avaliação pode ter o propósito de inventário, ou seja, de certificar, atestar a aquisição de determinado conhecimento. Neste caso, tem-se que a avaliação é somativa. O terceiro propósito apresentado por Hadji (1994) é o prognóstico, em que a avaliação tem por objetivo orientar o aluno em suas escolhas, informá-lo sobre suas aptidões, capacidades. Neste caso, a avaliação é do tipo diagnóstica.

O Quadro 1 relaciona os propósitos da avaliação com suas funções e tipos.

Quadro 1: Quadro geral das funções da avaliação dos alunos

Propósito	Função	Tipo
Inventário	Certificar	Somativa
Diagnóstico	Regular	Formativa
Prognóstico	Orientar	Diagnóstica

Fonte: Hadji, 1994, p. 65 (adaptado).

Independentemente do propósito, a avaliação na escola é sempre realizada a partir de instrumentos. O instrumento mais comumente utilizado nas escolas é a prova escrita que, muitas vezes, é elaborada com questões retiradas de um livro didático diferente do utilizado pelo professor em suas aulas (Buriasco, 1999). Vianna (1989) aponta esse fato como consequência da falta de formação técnica de muitos professores em relação à construção de instrumento de medidas.

Além disso, esse autor afirma que, em muitos casos, a prova é construída às pressas, resultando em instrumentos defeituosos e de má qualidade, que não permitem verificar capacidades complexas, como a de análise, pois muitas vezes enfatizam somente o que é trivial. Além da problemática em relação à construção do instrumento avaliativo, há também problemas nas correções das questões resolvidas pelos alunos nas provas escritas. Em geral, os professores não definem previamente os critérios de correção (Buriasco, 1999) e, para atribuição da nota da prova, quase sempre a questão mais complexa tem maior peso na composição da nota que as demais.

Por esses e outros motivos, a prática de avaliar a aprendizagem por meio de provas escritas pouco tem contribuído para regular a aprendizagem (função formativa da avaliação), bem como para “traduzir o conhecimento” do aluno em uma nota numérica ou conceito (função somativa da avaliação).

Uma alternativa para enfrentamento desta problemática seria a utilização de outros instrumentos de avaliação, como relatórios e ensaios produzidos pelos alunos.

As produções escritas dos alunos sobre a resolução de alguns problemas, atividades de investigação ou projetos nos quais trabalharam são, além de fator de aprendizagem, elementos importantes para avaliação (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997). Essas produções escritas revelam, além da execução de algoritmos específicos, o nível de compreensão dos conceitos envolvidos na resolução de um problema, pois quando um aluno deve escrever um texto a respeito de problemas por ele resolvidos, esse texto deve ser o mais claro possível, deve convencer e esclarecer o leitor a respeito dos procedimentos utilizados na resolução, bem como as ideias matemáticas nela contida.

Ponte et al. (1997) afirmam que as produções escritas de alunos possuem um grande valor formativo, pois contribuem para o desenvolvimento da autonomia e reflexão dos alunos em relação a sua própria aprendizagem. Tais produções podem ser elaboradas individualmente ou em grupo, podendo ter diferentes formas. Por exemplo, pode-se solicitar aos alunos que

comentem e expliquem a resolução de um problema ou um texto, bem como descrevam e analisem os resultados de alguma atividade de investigação da qual participaram.

Uma forma de transformar o desempenho dos alunos em nota numérica ou conceito a partir da produção escrita de alunos ao resolverem problemas é a utilização da escala holística focada, proposta por Charles, Lester & O'Daffer (apud Ponte et al. 1997).

Esta escala atribui, de acordo com as características do trabalho, de 0 a 4 pontos. Os critérios utilizados para atribuir esses pontos são definidos em consonância com o tipo de problema que está sendo avaliado. Por exemplo, pode-se atribuir 0 pontos se a questão estiver em branco; 1 ponto se o aluno consegue retirar os dados do problema, mas não o resolve; 2 pontos se o aluno, apesar de utilizar uma estratégia que não resolve o problema, retirou os dados deste e mostra alguma compreensão do problema; 3 pontos se o aluno utiliza uma estratégia que resolve o problema mas a executa de forma incorreta; 4 pontos se o aluno selecionou e desenvolveu corretamente uma estratégia adequada e apresenta a resposta correta. Vale ressaltar que, embora esta escala seja numérica, esta tem um caráter qualitativo (Ponte et al., 1997).

A escala holística focada ou outra escala elaborada pelo professor, de acordo com seus objetivos, devem chamar a atenção para aspectos como compreensão do problema, escolha e execução de estratégias eficazes, além da explicação fornecida pelos alunos. Assim, a utilização de uma escala como essa pode contribuir para que a avaliação de atividades de modelagem matemática cumpra as funções de regular os processos de ensino e de aprendizagem e de certificar.

3. METODOLOGIA

Nesta pesquisa nosso foco é apresentar reflexões alicerçadas em *como avaliar uma atividade de modelagem matemática desenvolvida na sala de aula a partir de critérios pontuados via uma escala*. Para isso, realizamos uma investigação de abordagem qualitativa. De acordo com Garnica (2004) as pesquisas qualitativas têm como características:

- (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma análise a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar;
- (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de se estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (Garnica, 2004, p. 86).

Esta pesquisa foi realizada em cinco momentos: construção da estratégia de avaliação, apresentação da estratégia aos alunos com o objetivo de validá-la, desenvolvimento da atividade de modelagem matemática em sala de aula,

utilização da estratégia para avaliar as atividades desenvolvidas e análise dos resultados.

O primeiro momento foi a construção da estratégia de avaliação a partir da escala holística focada proposta por Charles, Lester & O'Daffer (apud Ponte et al. 1997). Para isso, consideramos que as atividades de modelagem matemática seguem as fases de inteiração, matematização, resolução, interpretação dos resultados e validação, conforme propõem Almeida, Silva & Vertuan (2012).

A proposta de atividade de modelagem matemática que foi desenvolvida em sala de aula versou sobre uma situação problemática: aquecimento/resfriamento de um ambiente. Essa situação problemática foi definida em conjunto professora e os 29 alunos do 1º período de um curso de Licenciatura em Química na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1 de uma Universidade Pública do Estado do Paraná, no Brasil. Na atividade, os alunos reunidos em sete grupos teriam que escolher a situação-problema, descrevê-la, medir a temperatura de um ambiente em aquecimento ou resfriamento, anotando os dados coletados, além do registro de imagens via fotografias. A coleta de dados foi realizada pelos alunos fora da sala de aula sem a supervisão da professora. Esses alunos já tinham familiaridade com atividades de modelagem, pois haviam desenvolvido outras durante a disciplina.

Como a situação problemática era comum, na fase de inteiração consideramos as informações que os alunos teriam que buscar com o objetivo de definir um problema que pudessem investigar por meio da coleta de dados empíricos. Para tanto, a construção da escala baseou-se nos itens: descrição da situação-problema e definição do problema a ser estudado.

Com relação ao item *descrição da situação-problema*, a pontuação variou entre 2, 1, 0 pontos, considerando se os alunos descrevem a situação-problema de maneira que, a partir das informações, seja possível identificá-la. Seria atribuído pontuação 2 quando fosse possível identificar a situação-problema e que as informações apresentadas fossem necessárias para a definição de um problema a ser estudado; pontuação 1 quando fosse possível identificar a situação-problema, mas as informações necessárias não são apresentadas para a definição de um problema; pontuação 0 quando não fosse possível identificar a situação-problema com a descrição apresentada pelos alunos.

O item *definição do problema a ser estudado* foi pontuado em 2, 1 e 0 segundo a explicitação do problema. Entendemos que esse item estava relacionado ao anterior, atribuindo pontuação 2 quando o problema estava claramente definido a partir da descrição da situação-problema; pontuação 1 se o problema estava definido, mas não levava em consideração os dados coletados e pontuação 0 quando a situação-problema não gerava um problema a ser estudado.

No Quadro 2, apresentamos a parte da escala holística para avaliação da atividade de modelagem matemática que corresponde à fase de inteiração.

Quadro 2: Escala holística para a fase de inteiração

Descrição da situação-problema	
2	É possível identificar a situação-problema; apresenta informações necessárias para a definição de um problema a ser estudado.
1	É possível identificar a situação-problema, mas não apresenta informações necessárias para a definição de um problema a ser estudado.
0	Não é possível identificar a situação-problema.
Definição do problema a ser estudado	
2	O problema está claramente definido a partir da descrição da situação-problema.
1	Há definição de um problema não relacionado aos dados coletados.
0	A situação-problema não gera um problema a ser estudado.

Fonte: Construído pelos autores.

As fases de matematização e resolução levam em consideração a transformação da representação da linguagem natural para a matemática em que os alunos vislumbram um modelo matemático deduzido a partir das informações coletadas. Com isso, para a construção da escala holística, consideramos os itens: dedução do modelo matemático e resultados matemáticos.

A pontuação do item *dedução do modelo matemático* levou em consideração a representação da situação-problema a ser estruturada matematicamente que poderia ser feita usando softwares computacionais. Para tanto, o modelo matemático deveria estar em consonância com o que se pretendia estudar. A pontuação variou entre 4, 3, 2, 1 e 0. Atribuiu-se pontuação 4 quando expresso um modelo matemático que representasse a situação-problema; pontuação 3 quando fossem expressos um ou mais modelos matemáticos ajustados aos dados, mas que não representavam a situação-problema; pontuação 2 se fosse expresso apenas um modelo matemático que se ajustasse aos dados, mas que não representasse a situação-problema; pontuação 1 se houvessem registros de um modelo matemático que não foi expresso explicitamente, mas discutido entre os membros do grupo; pontuação 0 quando nenhum registro remetesse ao modelo matemático.

A construção da escala para o item *resultados matemáticos* levou em consideração algumas ações dos alunos enquanto estivessem desenvolvendo a atividade de modelagem. Essas ações foram estruturadas em três subitens: explicação de procedimentos, persistência na resolução, flexibilidade na resolução. Esses subitens foram pontuados em 2, 1 e 0.

Para avaliar o subitem explicação de procedimentos, levamos em consideração os raciocínios explicitados pelos alunos quando questionados sobre os resultados que obtiveram com o modelo matemático. Para isso, foi atribuída pontuação 2 quando fossem explicados corretamente os raciocínios utilizados na seleção dos procedimentos de resolução dos cálculos solicitados; pontuação 1 quando os integrantes do grupo apresentassem algumas falhas nos raciocínios usados e na seleção dos procedimentos de resolução dos cálculos solicitados e pontuação 0 quando não fossem explicadas as razões para a seleção dos procedimentos de resolução dos cálculos solicitados.

O subitem persistência na resolução está atrelado às atitudes frente a cálculos sugeridos pela professora. A pontuação 2 seria atribuída quando fossem realizados os cálculos solicitados mesmo com dificuldades; pontuação 1 quando fossem realizados parte dos cálculos solicitados, desistindo ao encontrar dificuldades e pontuação 0 quando algum fosse realizado pois encontraram dificuldades ou desistiram de realizar.

A flexibilidade na resolução consiste em um subitem relacionado a ações em que os alunos podem ter mediante dificuldades de realizar alguns cálculos ou propostas de desenvolvimento de outros métodos de resolução. Para isso, atribuiu-se pontuação 2 quando percebessem que os métodos utilizados eram adequados e/ou propusessem outros métodos adequados de resolução dos cálculos solicitados; pontuação 1 quando percebessem que os métodos utilizados não eram adequados e propusessem outros métodos, mas não-adequados de resolução dos cálculos solicitados; pontuação 0 quando não percebessem que os métodos utilizados não eram adequados nem propusessem outros métodos para a resolução dos cálculos solicitados.

No Quadro 3, apresentamos parte da escala holística do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática nas fases de matematização e resolução.

Quadro 3: Escala holística para as fases de matematização e resolução

Dedução do modelo matemático	
4	Expressa um modelo matemático que representa a situação-problema.
3	Expressa um ou mais modelos matemáticos que não representam a situação-problema.
2	Expressa apenas um modelo matemático que não representa a situação-problema.
1	Há registros de um modelo matemático não expresso.
0	Não há registro remetendo a um modelo matemático.
Resultados matemáticos	
Explicação de procedimentos	
2	Explica corretamente os raciocínios usados na seleção dos procedimentos de resolução dos cálculos solicitados.
1	Apresenta algumas falhas nos raciocínios usados e na seleção dos procedimentos de resolução dos cálculos solicitados.
0	Não explica as razões para a seleção dos procedimentos de resolução dos cálculos solicitados.
Persistência na resolução	
2	Realiza os cálculos solicitados mesmo que sejam encontradas dificuldades.
1	Realiza parte dos cálculos solicitados, desistindo ao encontrar dificuldades.
0	Não realiza os cálculos solicitados ou desiste facilmente ao encontrar dificuldades.
Flexibilidade na resolução	
2	Percebe que os métodos utilizados são adequados e/ou propõe outros métodos adequados de resolução dos cálculos solicitados.
1	Percebe que os métodos utilizados não são adequados e propõe outros métodos não-adequados de resolução dos cálculos solicitados.
0	Não percebe que os métodos utilizados não são adequados nem propõe outros métodos adequados de resolução dos cálculos solicitados.

Fonte: Construído pelos autores.

Para a construção da escala vinculada às fases interpretação dos resultados e validação nos pautamos na

interpretação matemática para a situação-problema realizada pelos alunos, bem como os cálculos vinculados à validação do modelo matemático para então considerarem uma solução para o problema. Com isso, destacamos os itens interpretação dos resultados, validação e solução para o problema. A pontuação desses itens variou entre 2, 1 e 0.

No item *interpretação dos resultados* atribuímos pontuação 2 se fossem interpretados os resultados matemáticos e não-matemáticos com a situação-problema; pontuação 1 se os resultados matemáticos ou não-matemáticos fossem interpretados parcialmente com a situação-problema; pontuação 0 se não fosse realizada interpretação dos resultados obtidos com a situação-problema, aceitando quaisquer resultados.

A pontuação do item *validação* foi atribuída se explicitassem ou não comparação entre os dados coletados e os obtidos por meio do modelo matemático. Para isso, atribuímos pontuação 2 quando a validação dos dados fosse apresentada por meio da comparação dos resultados calculados com os coletados, utilizando uma tabela por exemplo; pontuação 1 se não fosse apresentada de forma explícita a validação dos dados por meio de comparação, mas com argumentos que possibilitam uma validação parcial; pontuação 0 quando não fosse apresentada de forma explícita ou implícita a validação do modelo matemático ou não fizesse a dedução de um modelo matemático para a situação.

Diante de um modelo matemático válido se faz necessária a retomada do problema e apresentação de uma solução que foi pontuada em 2 quando a solução correspondesse ao problema; pontuação 1 quando a solução não correspondesse ao problema; pontuação 0 quando não apresentasse solução para o problema.

No Quadro 4, apresentamos parte da escala holística do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática nas fases de interpretação dos resultados e validação.

Quadro 4: Escala holística para as fases de interpretação dos resultados e validação

Interpretação dos resultados	
2	Interpreta os resultados matemáticos e não-matemáticos com a situação-problema.
1	Interpreta parcialmente os resultados matemáticos ou não-matemáticos com a situação-problema.
0	Não interpreta os resultados obtidos com a situação-problema, aceitando quaisquer resultados encontrados.
Validação	
2	Apresenta a validação dos dados por meio da comparação dos resultados calculados pelo modelo matemático deduzido com os dados coletados empiricamente.
1	Não apresenta explicitamente a validação dos dados por meio de comparação entre os calculados por meio do modelo matemático e os coletados empiricamente, mas apresenta argumentos que possibilitam uma validação parcial.
0	Não apresenta explícita nem implicitamente a validação do modelo matemático deduzido ou não faz dedução de modelo matemático para a situação.
Solução para o problema	
2	Apresenta solução que corresponde ao problema definido.
1	Apresenta solução que não corresponde ao problema definido.
0	Não apresenta solução alguma.

Fonte: Construído pelos autores.

O valor total atribuído à atividade, segundo a escala construída, foi de 20 pontos.

Com a escala holística construída seguindo as fases do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, passou-se para o segundo momento da pesquisa em que os alunos receberam via e-mail a escala e tinham quatro dias para avaliá-la e questioná-la antes de sua aplicação.

Como os alunos não apresentaram questionamentos nem dúvidas quanto à escala, o terceiro momento da investigação foi o desenvolvimento em sala de aula da atividade de modelagem matemática, já com os dados trazidos pelos alunos, num período de cinco horas/aula. As discussões em sala de aula foram gravadas em áudio e vídeo com o consentimento dos envolvidos. Neste texto, também fazemos menção aos registros dos relatórios das atividades entregues pelos grupos. Para nos referirmos aos alunos utilizamos a letra A e um número que distingue os membros dos grupos.

O quarto momento desta pesquisa foi a utilização da estratégia de avaliação das produções dos sete grupos de alunos que desenvolveram a atividade nomeados por G1, G2, G3, G4, G5, G6 e G7. Os grupos G1, G4, G5 e G7 obtiveram a nota máxima (20 pontos); G2 e G7 obtiveram nota intermediária (16 pontos); G3 obteve a nota mínima (10 pontos).

O quinto momento da pesquisa corresponde às análises levando em consideração o referencial teórico adotado. Neste artigo, apresentamos as análises das produções de três grupos – G1, G2 e G3 – visto que correspondem a um grupo com nota máxima, um grupo com nota intermediária e um grupo com nota mínima, respectivamente. A escolha dos grupos que atingiram as notas máxima e intermediária levou em consideração a frequência e/ou conclusão da disciplina por todos os integrantes do grupo.

A avaliação de cada atividade de modelagem é apresentada junto à descrição da mesma no tópico subsequente.

4. DESCRIÇÃO E AVALIAÇÃO DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DESENVOLVIDAS

Neste tópico descrevemos o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática articulando com a pontuação segundo a escala holística construída e apresentada nos Quadros 2, 3 e 4. Com isso, subsidiamos nossas reflexões com relação à avaliação de uma atividade de modelagem matemática desenvolvida na sala de aula.

4.1. Atividade de modelagem matemática desenvolvida por G1: Resfriamento de um veículo

Para desenvolver a atividade de modelagem matemática solicitada pela professora, os integrantes de G1 escolheram a temática *A análise da variação da temperatura no interior de um veículo após a sua permanência sob o sol*. O grupo que desenvolveu a atividade era composto por quatro alunos (A1, A2, A3 e A4) e o interesse surgiu dos

próprios alunos que, em geral, deixam o veículo sob o sol em períodos de trabalho ou aula. Para a coleta de dados o grupo usou o veículo de um dos participantes que havia permanecido sob o sol e colocou-o na sombra, abriu os vidros e fez uso de um termômetro digital que mede temperatura de ambientes, anotando de 2 em 2 minutos a temperatura interna do veículo (Figura 1).



Figura 1: Coleta de dados de G1
Fonte: Relatório dos alunos.

A temperatura inicial do interior do veículo registrada pelo grupo foi de 35 °C e a temperatura ambiente no início do processo de coleta de dados era de 27 °C. Com essas informações e os dados coletados e representados na Tabela 1, o grupo iniciou o encaminhamento da atividade na sala de aula.

Tabela 1: Dados coletados pelos alunos

Tempo (minutos)	Temperatura no interior do veículo (°C)	Tempo (minutos)	Temperatura no interior do veículo (°C)
0	35	8	32
2	34,1	10	31,4
4	33,2	12	30,9
6	32,6	14	30,4

Fonte: Relatório dos alunos.

As informações trazidas pelos alunos na sala de aula já denotava uma descrição da situação-problema a ser estudada, apresentando informações necessárias para a definição de um problema a ser estudado, conforme transcrição da conversa com a professora:

A4: *Profe, trouxemos os dados aqui que coletamos e já sabemos o que vamos fazer.*

Prof: *E o que vocês pensaram em estudar?*

A1: *Quando a gente deixa o carro no sol, fica bem quente. Daí se a gente abre as janelas já vai ficando mais fresquinho!*

A3: *Então ao invés de usar o ar condicionado para refrescar o carro, pensamos em ver quando a temperatura fica igual à do ambiente para economizar combustível, porque vai exigir menos do ar.*

Prof: *Certo. Anotem o problema.*

Com a informação de que a temperatura inicial registrada era de 35 °C, o interesse dos alunos era determinar o tempo necessário para essa temperatura chegar a 27 °C, temperatura ambiente, conforme transcrição da conversa e Figura 2. Com isso, o problema está claramente definido a partir da descrição da situação-problema.

Verificar quanto tempo é necessário para que um carro chegue a temperatura ambiente, assim não sendo necessário a utilização de ar condicionado para seu resfriamento (O que gera economia em combustível e dinheiro)

Figura 2: Problema definido por G1

Fonte: Relatório dos alunos.

A matematização e resolução ocorreram com a dedução de um modelo matemático que subsidiou a solução do problema. Essa abordagem foi mediada pelo uso do software Curve Expert (software livre de uso frequente em aulas de Cálculo Diferencial e Integral). Para tanto, os alunos fizeram algumas considerações, conforme transcrição:

A2: *Mas como a gente consegue a função? O modelo para substituímos a temperatura e termos o tempo?*

A1: *'Pera'. Quais são as variáveis da situação?*

A3: *Temperatura e tempo.*

A1: *É, mas temos que ver aquele lance de variável dependente e independente para colocarmos no Curve. E qual é a dependente?*

A4: *Tempo... não temperatura, porque dependente depende. E a temperatura de dentro do carro depende do tempo.*

A1: *Isso.*

As representações geradas com o apoio do software Curve Expert referem-se à tabela e pontos no plano cartesiano (itens (a) e (b) da Figura 3). A partir dessa representação, com o uso do software, ajustaram aos dados a curva

$$Y(x) = \frac{19}{1 - 0,46e^{-0,01x}}$$

no interior do veículo (em graus Celsius) em função do tempo x , em minutos (item (c) da Figura 3). Com as considerações e representações realizadas pelos alunos com o auxílio do software consideramos que G1 expressa um modelo matemático que representa a situação-problema.

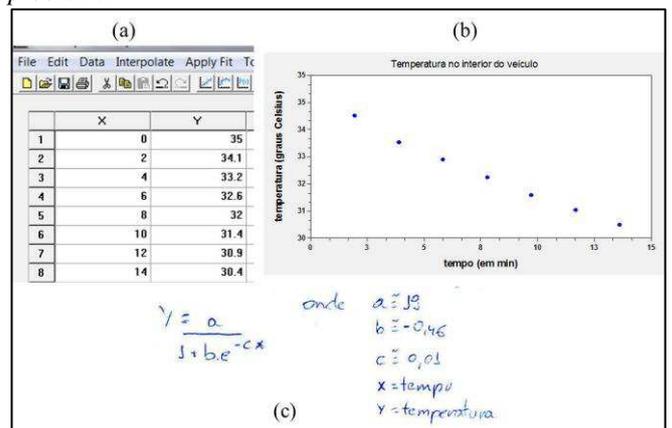


Figura 3: Matematização e resolução

Fonte: Relatório dos alunos.

Perguntados sobre a escolha do modelo ajustado aos pontos pelo software Curve Expert, o grupo de alunos responde:

A1: *Professora, a gente sabe que a função precisa ser assintótica, pois vai tendendo a se igualar à temperatura ambiente e o modelo logístico a gente já viu que dá certo naquela atividade [referindo-se à outra atividade desenvolvida em sala de aula].*

Prof: *E o que significa o dezanove na função?*

A3: É que, usando essa função, a temperatura não fica menor que dezenove, não é isso?

Profa: Exatamente. Mas isso vai acontecer na situação-problema que estão estudando?

A3: Não sei.....

A4: Se vai chegar a dezenove?

A1: Não vai chegar a dezenove, professora. Vai chegar só até vinte e sete que é a temperatura do ambiente. Não vai ficar menos do que isso.

Prof: E quando isso ocorre?

A1: Vamos calcular!

O que podemos evidenciar com os argumentos dos integrantes de G1 é que, embora o modelo matemático indica um valor assintótico diferente do que acontece na situação, esse explica corretamente os raciocínios usados na seleção dos procedimentos de resolução dos cálculos solicitados, ao considerar uma função assintótica para representar a situação.

Para a análise do problema em estudo os alunos determinaram o tempo necessário para a temperatura do interior do veículo chegar a 27 graus Celsius. Para isso, fizeram $Y(x) = 27$ e utilizando procedimentos algébricos obtiveram $x = 44$ minutos, conforme mostra a Figura 4, confirmando que o grupo apresenta solução que corresponde ao problema definido.

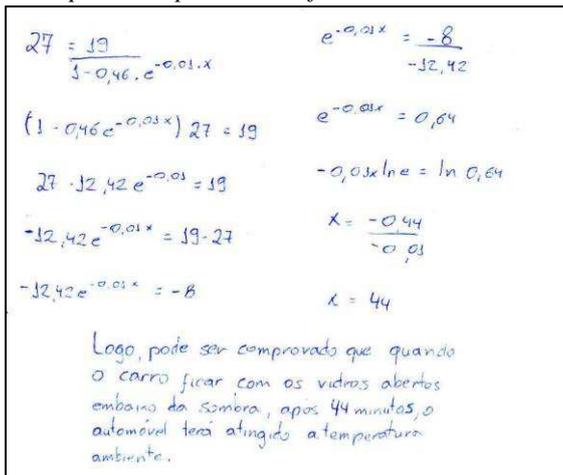


Figura 4: Solução do problema

Fonte: Relatório dos alunos.

Quando questionados sobre a validade da solução, os alunos afirmam que a fizeram por meio de análise com os dados coletados empiricamente, mas também haviam calculado no Excel os valores da temperatura obtidos com o modelo matemático ao atribuir valores para o tempo, conforme Figura 5, apresentando a validação dos dados por meio da comparação dos resultados calculados pelo modelo matemático deduzido com os dados coletados empiricamente.

	A	B	C	D	E
1	Logistic Model: $y=a/(1+b*\exp(-cx))$				
2	Coefficient Data:				
3	$f(x)=19/(1-0,46*(EXP(-0,01*x)))$				
4	0	35,18519		24	29,77351
5	2	34,60153		26	29,44293
6	4	34,04793		28	29,12594
7	6	33,52222		30	28,82178
8	8	33,02243		32	28,52975
9	10	32,5468		34	28,24919
10	12	32,09369		36	27,97949
11	14	31,66164		38	27,72008
12	16	31,24929		40	27,47043
13	18	30,85539		42	27,23005
14	20	30,47881	43,98665		27
15	22	30,11851		44	26,99848

Figura 5: Validação do modelo matemático

Fonte: Relatório dos alunos.

Para interpretar do ponto de vista matemático a observação de que nos primeiros instantes a temperatura cai mais rapidamente (isto pode ser observado nos dados da Tabela 1), os alunos se remeteram ao conceito de derivada já abordado em aulas anteriores, denotando uma proposta de métodos adequados de resolução dos cálculos solicitados conforme afirmação de A4:

A4: Agora a gente poderia calcular a derivada não é professora? Com isso temos a taxa de variação da temperatura em qualquer tempo que quisermos, não é?

Profa: E o que isso significa?

A2: Hummm... A derivada posso calcular no GeoGebra? [referindo-se ao uso do software Geogebra já introduzido nas aulas].

Profa: Respondam o problema.

A3: Gente como podemos calcular a derivada aqui. Qual é a regra? Do tomo? Da cadeia? Ai A4, porque foi falar de derivada para a professora?

A1: Calma A3, vamos pensar, tudo vai dar certo no final. [risos]

Com a sugestão de A2, os alunos calcularam a derivada da função $Y(x) = \frac{19}{1 - 0,46e^{-0,01x}}$ utilizando o software

GeoGebra e obtiveram a função derivada $Y'(x) = \frac{-437e^{-0,01x}}{1058(e^{-0,01x})^2 - 4600e^{-0,01x} + 5000}$. No entanto, um

dos integrantes do grupo (A1) decide realizar procedimentos algébricos para determinar a derivada da função conforme mostra a Figura 6. Com essa abordagem, consideramos que o grupo realiza os cálculos solicitados mesmo que sejam encontradas dificuldades.

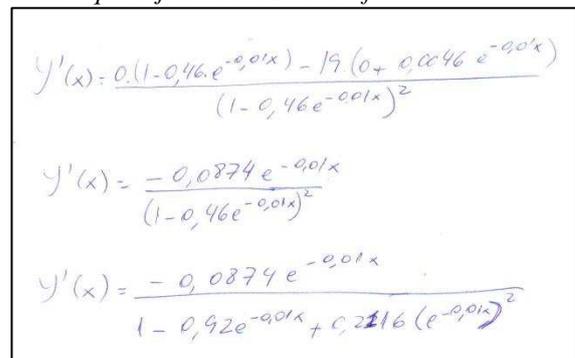


Figura 6: Cálculo algébrico da derivada

Fonte: Relatório dos alunos.

Com a resolução desenvolvida por A1, os alunos, com a professora, interpretaram a variação do resfriamento do interior do veículo, conforme transcrição:

Profa: E o que vocês podem concluir observando a derivada?

A1: É negativa! Nossa, é negativa.

A2: Sim, porque é resfriamento, lembra daquela situação da esfera de aço quente? [remetendo a aulas anteriores]

Profa: E observando a representação gráfica feita no GeoGebra? [Figura 7]

A1: A função derivada é crescente. Espera... e assintótica. [observando a representação da função no software]

Profa: E o que isso significa?

A2: Se substituirmos valores aqui para x na função derivada temos... vamos ver, para x igual a dois [calculando no GeoGebra], temos que o coeficiente da reta tangente ao gráfico da função Y é menos zero vírgula vinte e oito [escrevendo -0,28], que fisicamente indica que quando x é igual a dois minutos, a taxa de resfriamento no interior do veículo é de zero vírgula vinte e oito graus Celsius por minuto. Estou analisando aqui, professora. Se fizermos para outros valores termos... [calculando no GeoGebra] x igual a quatro a taxa é menos zero vírgula vinte e sete, e fisicamente representa que a taxa de resfriamento é zero vírgula vinte e sete; x igual a seis dá uma taxa de resfriamento de zero vírgula vinte e seis. Parece que a taxa se resfriamento no interior do veículo vai diminuindo com o passar do tempo.

A4: Faz aí para x igual a quarenta e quatro minutos.

A2: Taxa de resfriamento é de zero vírgula onze. Diminuiu.

A1: Pensei que seria mais próximo de zero.

Profa: Quando seria próximo de zero?

A3: Com essa função? Quando fosse perto de dezenove graus Celsius. Mas isso não vai acontecer no nosso problema. Quando chega à temperatura do ambiente não tem mais variação... a taxa de variação é praticamente nula. Vou anotar isso aqui. (Figura 8).

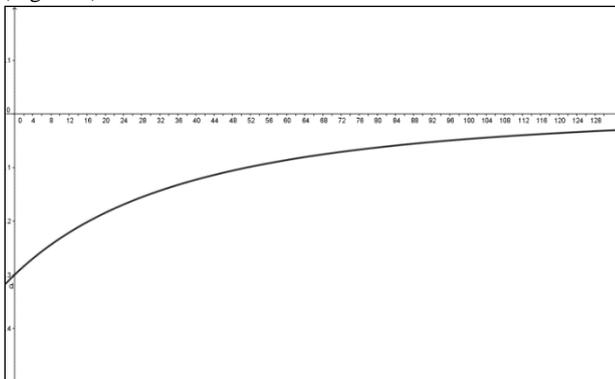


Figura 7: Representação gráfica da derivada

Fonte: Relatório dos alunos.

O cálculo da derivada da função e sua representação gráfica possibilitaram aos alunos estabelecer relações entre esse conteúdo matemático e o resfriamento do interior do veículo, ou seja, o grupo interpreta os resultados matemáticos e não-matemáticos com a situação-problema, conforme indica a transcrição e anotações feitas por A3 (Figura 8).

A taxa de variação inicial, é maior do que a final, pois o carro resfria-se até que atinja a temperatura de seu equilíbrio com o ambiente, e não esfria mais, ou seja, mantém-se constante.

Figura 8: Interpretação dos resultados matemáticos com a situação

Fonte: Relatório dos alunos.

Ao avaliarmos a atividade de modelagem matemática desenvolvida por G1 segundo as fases, a nota obtida foi 20 pontos, conforme consta no Quadro 5.

Quadro 5: Avaliação da atividade de modelagem matemática desenvolvida por G1

INTEIRAÇÃO	Descrição da situação-problema	
	2	É possível identificar a situação-problema; apresenta informações necessárias para a definição de um problema a ser estudado.
INTEIRAÇÃO	Definição do problema a ser estudado	
	2	O problema está claramente definido a partir da descrição da situação-problema.
MATEMATIZAÇÃO E RESOLUÇÃO	Dedução do modelo matemático	
	4	Expressa um modelo matemático que representa a situação-problema.
	Resultados matemáticos	
	Explicação de procedimentos	
	2	Explica corretamente os raciocínios usados na seleção dos procedimentos de resolução dos cálculos solicitados.
	Persistência na resolução	
MATEMATIZAÇÃO E RESOLUÇÃO	2	Realiza os cálculos solicitados mesmo que sejam encontradas dificuldades.
	Flexibilidade na resolução	
	2	Percebe que os métodos utilizados são adequados e/ou propõe outros métodos adequados de resolução dos cálculos solicitados.
	Interpretação dos resultados	
INTERPRETAÇÃO E VALIDAÇÃO	2	Interpreta os resultados matemáticos e não-matemáticos com a situação-problema.
	Validação	
	2	Apresenta a validação dos dados por meio da comparação dos resultados calculados pelo modelo matemático deduzido com os dados coletados empiricamente.
INTERPRETAÇÃO E VALIDAÇÃO	Solução para o problema	
	2	Apresenta solução que corresponde ao problema definido.

Fonte: Construído pelos autores.

4.2. Atividade de modelagem matemática desenvolvida por G2: Aquecimento e resfriamento de um carro

Os integrantes de G2 escolheram coletar dados referentes ao aquecimento e ao resfriamento do interior de um veículo. Esse grupo era formado por seis alunos (A5, A6, A7, A8, A9 e A10). No entanto, a coleta de dados foi realizada por quatro deles (A5, A6, A7 e A8) os outros dois participaram do desenvolvimento da atividade em sala de aula.

Para coletar os dados de aquecimento, o grupo deixou o veículo todo fechado sob o sol no período das 11h30 até as 11h55 e, com um termômetro digital, anotou a temperatura de 5 em 5 minutos (Figura 9).



Figura 9: Coleta de dados de G2
Fonte: Relatório dos alunos.

Com relação ao resfriamento do veículo, o grupo colocou o carro na sombra de uma árvore no período das 13h00 as 13h20 e anotou a temperatura do interior do mesmo de 5 em 5 minutos (Figura 10).

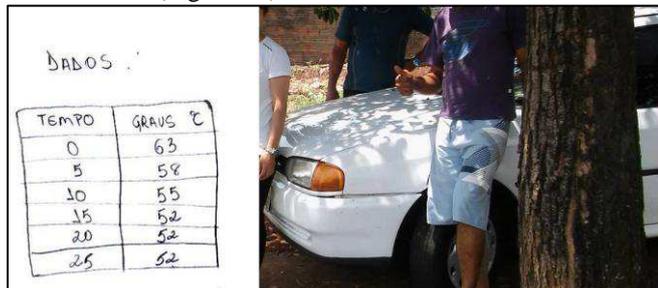


Figura 10: Coleta de dados de G2
Fonte: Relatório dos alunos.

Na sala de aula, o grupo passou por um impasse para escolher que dados utilizariam para desenvolver a atividade e, com isso, definir o problema a ser estudado, conforme transcrição da conversa com a professora:

A5: Professora, o negócio é o seguinte, a gente marcou a temperatura de aquecimento do carro que a gente deixou todo trancado na frente da casa do A7. Marcamos duas vezes, uma com o termômetro digital que ficou o melhor e outra com o termômetro normal.

A6: Mas também fizemos a marcação do resfriamento do carro, fala disso também A5, depois de tudo. Mas acho que é mais interessante estudar o resfriamento, fala para eles professora!

Prof: Bom vocês têm dados suficientes para desenvolver a atividade. Em grupo, devem decidir se estudam o resfriamento ou aquecimento.

A6: O A7 até colocou os pontos de aquecimento no curve lá e ficou algo diferente do que vimos na realidade.
Prof: Como assim?

A6: Mostra para a professora A7.

A7: Não sei, porque aqui no computador dá esse modelo [mostrando os dados ajustados pelo Curve Expert] e na realidade depois a temperatura máxima que marcamos foi de

sessenta e três ao meio dia que é o horário de pico. Mais quente e permaneceu assim até marcarmos o resfriamento.

Prof: Entrem em um consenso e definam um problema a ser estudado.

Diante das informações coletadas, parece que o grupo se depara com duas situações iniciais das quais deveriam escolher trabalhar naquele momento em sala de aula: aquecimento do carro ou resfriamento do carro. O grupo apresenta informações necessárias para a definição de um problema a ser estudado. No entanto, evidenciamos que a temática aquecimento foi abandonada pelo grupo quando se depararam com as representações geradas pelo software Curve Expert (Figura 11), ao ajustar os dados à curva representada algebricamente por $Y(x) = 37,4(1,9 - e^{-0,081x})$ em que Y representa a temperatura no interior do veículo (em graus Celsius) em função do tempo x, em minutos. O integrante A7 afirma que a projeção dos valores que se aproxima de 71,06 °C é diferente do máximo que haviam coletado, ou seja, 63 °C, no que consideraram o “horário de pico” (argumento de A7).

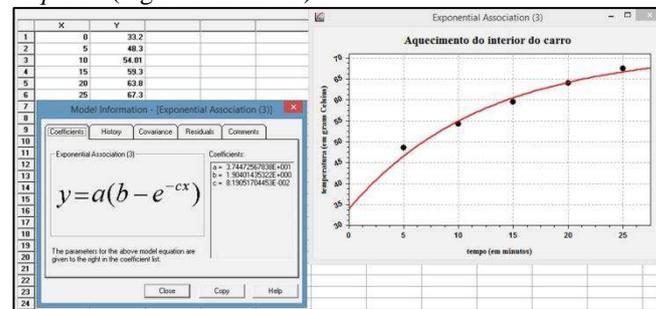


Figura 11: Representações geradas pelo Curve Expert
Fonte: Relatório dos alunos.

Diante dessas argumentações, o grupo opta por realizar um estudo do resfriamento do carro que se encontrava à temperatura de 63 °C quando colocado, com os vidros fechados, sob a sombra de uma árvore. A intenção do grupo foi determinar após quanto tempo sob a sombra a temperatura interna do carro se iguala à temperatura ambiente, que no momento da coleta era de 33,2 °C, conforme consta na Figura 12. Isso denota que o problema está claramente definido a partir da descrição da situação-problema.

A TEMPERATURA DE UM CARRO EXPOSTO AO SOL É DE 63°C, QUAL SERÁ O TEMPO PARA QUE O CARRO POSSA ALCANÇAR A TEMPERATURA AMBIENTE? LEMBRANDO: TEMPERATURA AMBIENTE 33,2°C.

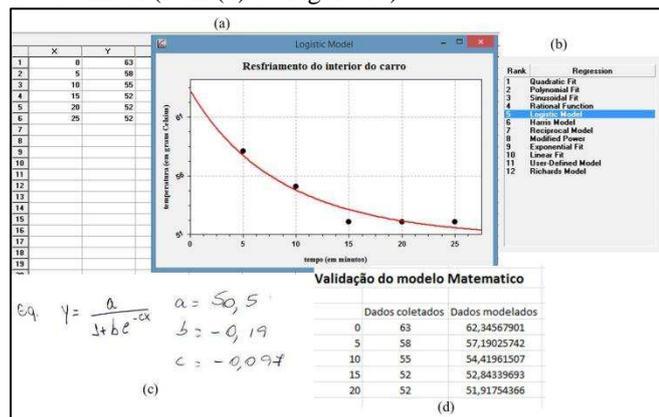
Figura 12: Problema definido por G2

Fonte: Relatório dos alunos.

A resolução com vistas à dedução de um modelo matemático que representava a situação que se propuseram a investigar foi subsidiada por meio do ajuste de curvas gerado com o auxílio do software Curve Expert (item (a) da Figura 13). A partir das representações, a curva ajustada e escolhida pelos alunos foi a $Y(x) = \frac{50,5}{1 - 0,19 \cdot e^{-0,097x}}$ em que

Y representa a temperatura no interior do veículo (em graus Celsius) em função do tempo x, em minutos (item (c) da Figura 13). De posse de um modelo matemático, o grupo apresenta a validação dos dados por meio da comparação dos resultados calculados pelo modelo matemático

deduzido com os dados coletados empiricamente com o uso do Excel (item (d) da Figura 13).



Com o modelo matemático que representava a situação para os pontos coletados empiricamente, o grupo encaminha a solução do problema, conforme transcrição da conversa:

A7: *Pessoal, olhem que esse modelo ficou bom para a situação não é mesmo?*

A9: *Eu concordo!*

A5: *Será que era isso que a professora queria?*

A6: *Deve ser sim, temos o modelo do resfriamento, agora quando vai ser igual à temperatura ambiente? Como fazer isso?*

A5: *Espera, vou perguntar para a professora.*

A8: *Gente é só substituir o Y por trinta e três vírgula dois.*

A5: *Isso A8. Você resolve aí?*

A7: *Enquanto isso, vou usar o GeoGebra aqui, porque todos os outros grupos estão fazendo o gráfico no GeoGebra e também colocar esse valor da temperatura para ver onde é a intersecção. Daí comparamos A8.*

A8: *Beleza, deixa comigo.*

Enquanto A8 resolve algebricamente o problema realizando os cálculos para $Y = 33,2$, A7 faz a representação gráfica da função que representa o resfriamento do carro, além de inserir a função $Y = 33,2$ por meio do software GeoGebra (Figura 14). Com isso, o grupo percebe que os métodos utilizados são adequados e/ou propõe outros métodos adequados de resolução dos cálculos solicitados.

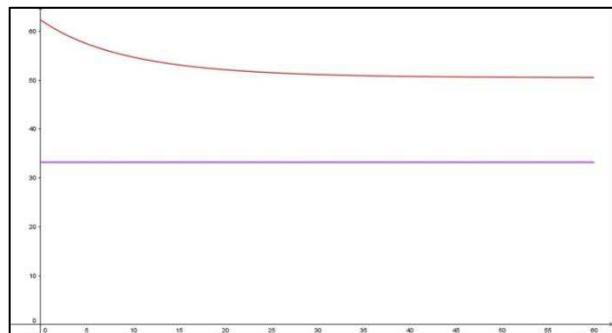


Figura 14: Solução do problema por meio do GeoGebra

Fonte: Relatório dos alunos.

No entanto, antes mesmo que A8 finalizasse os cálculos algébricos, A7 interrompe fazendo o comentário:

A7: *Gente, essa função nunca vai ser trinta e três vírgula dois! Olhem aqui o gráfico.*

A5: *Professora, chega aqui!*

A7: *O nosso problema não tem solução.*

Prof: *Como não tem solução?*

A7: *Não tem como a temperatura do carro se igualar com a do ambiente!*

Prof: *E por quê?*

A5: *Boa pergunta. [risos]*

Prof: *Essa função representa a situação?*

A5: *Claro, fizemos a validação e tudo!*

Prof: *Sei, mas o que acontece com a função que vocês escolheram quando o tempo aumenta?*

A5: *Como assim? Não sei.*

Prof: *Se vocês fizerem uma análise do tempo quando esse tende ao infinito.*

A7: *Bom... só se a gente calcular o limite. É, é, deixa eu lembrar [folheando o caderno e procurando registros anteriores] [...] nossa cinquenta vírgula cinco. Nunca vai dar a temperatura ambiente.*

Prof: *E por que vocês escolheram essa curva?*

A5: *Aaaaaa, era a melhor?*

A6: *Melhor nada, não responde o problema. E agora.*

Prof: *Sugiro que vocês analisem as outras curvas!*

Os integrantes de G2 percebem que o modelo matemático escolhido de fato não representa a situação-problema que se propuseram a investigar. Essa percepção ocorreu com a representação gráfica gerada pelo GeoGebra e por meio dos cálculos algébricos desenvolvidos tanto ao fazerem $Y = 33,2$ quanto ao calcularem o limite da função (Figura 15). No entanto, o que evidenciamos é que o grupo realiza os cálculos solicitados mesmo que sejam encontradas dificuldades.

Figura 15: Cálculos algébricos realizados por G2

Fonte: Relatório dos alunos.

Diante das sugestões da professora, os alunos ainda tentam sem êxito analisar as curvas que o software ajustou aos dados (item (b) da Figura 13). Não analisam, por exemplo, se a curva quadrática $Y(x) = 0,026x^2 - 1,095x + 62,96$, primeira curva ajustada pelo software apresenta um valor de mínimo e se esse mínimo é maior do que a temperatura ambiente, ou seja, $33,2^\circ\text{C}$, podendo ser considerado um modelo matemático para a situação, conforme argumento de A5: *Função quadrática com a maior do que zero, será? Decresce e cresce, parece não ser boa!*, denotando que o grupo interpreta parcialmente os resultados matemáticos ou não-matemáticos com a situação-problema. Além disso, não leva em consideração a periodicidade do dia que pode ser representada pela função cosseno $Y(x) = 89,37 + 37,8\cos(-0,039x + 2,35)$, terceira curva ajustada aos dados, alegando que: *Essa função não entendi direito, deixa, vamos ver as outras* (argumento de A5, durante conversa entre os integrantes do grupo). Com isso, consideramos que o grupo apresenta algumas falhas

nos raciocínios usados e na seleção dos procedimentos de resolução dos cálculos solicitados.

Mesmo que o grupo empreendeu um esforço para analisar as curvas ajustadas, não abordaram outra para responder o problema, apresentando solução que não corresponde ao problema definido, conforme mostra a Figura 16. De fato, chegará um momento em que a temperatura do interior do veículo ficará próxima da temperatura ambiente, o que não é denotado pelo modelo matemático expresso pelo grupo, mas que poderia ser por outro que não foi analisado. Desistir de analisar outros modelos pode denotar uma falta de conhecimento matemático do grupo ou mesmo ansiedade para finalizar a atividade na aula.

Figura 16: Solução para o problema dada por G2
Fonte: Relatório dos alunos.

Ao avaliarmos a atividade de modelagem matemática desenvolvida por G2 segundo as fases, a nota obtida foi 16 pontos, conforme consta no Quadro 6.

Quadro 6: Avaliação da atividade de modelagem matemática desenvolvida por G2

INTERAÇÃO	Descrição da situação-problema		
	2	É possível identificar a situação-problema; apresenta informações necessárias para a definição de um problema a ser estudado.	
INTERAÇÃO	Definição do problema a ser estudado		
	2	O problema está claramente definido a partir da descrição da situação-problema.	
MATEMATIZAÇÃO E RESOLUÇÃO	Dedução do modelo matemático		
	3	Expressa um ou mais modelos matemáticos que não representam a situação-problema.	
	Resultados matemáticos		
	Explicação de procedimentos		
	1	Apresenta algumas falhas nos raciocínios usados e na seleção dos procedimentos de resolução dos cálculos solicitados.	
	Persistência na resolução		
	2	Realiza os cálculos solicitados mesmo que sejam encontradas dificuldades.	
Flexibilidade na resolução			
2	Percebe que os métodos utilizados são adequados e/ou propõe outros métodos adequados de resolução dos cálculos solicitados.		
INTERPRETAÇÃO E VALIDAÇÃO	Interpretação dos resultados		
	1	Interpreta parcialmente os resultados matemáticos ou não-matemáticos com a situação-problema.	
	Validação		
	2	Apresenta a validação dos dados por meio da comparação dos resultados calculados pelo modelo matemático deduzido com os dados coletados empiricamente.	
Solução para o problema			
1	Apresenta solução que não corresponde ao problema definido.		

Fonte: Construído pelos autores.

4.3. Atividade de modelagem matemática desenvolvida por G3: Variação de temperatura de uma garagem

Para estudar a variação de temperatura de uma garagem no período das 10h00 as 18h00, os integrantes de G3 (A11, A12, A13 e A14) realizaram medições de 40 em 40 minutos, anotando os dados em uma tabela que construíram no Excel (Figura 17).

	A	B
1	0	30
2	40	31
3	80	32
4	120	33
5	160	33.5
6	200	34.5
7	240	35
8	280	36
9	320	36
10	360	36
11	400	35.5
12	440	35
13	480	35

Figura 17: Dados coletados pelos alunos e representados no Excel

Fonte: Relatório dos alunos.

A garagem escolhida era da casa de um dos integrantes do grupo cujas dimensões é de 2m de largura por 2,2m de comprimento e coberta, conforme transcrição de conversa gravada pelo celular de um deles durante a coleta de dados:

A12: Olhem aqui, meu pai disse que aqui a gente tem dois metros de largura e dois metros e vinte de comprimento. Mas para garantir, vamos medir!

A13: A12 se o seu pai disse, acho bom acreditarmos!

A14: Eu estou com a A12. Você tem trena aqui A12?

A12: Tenho sim...

[alunos confirmam as medidas]

Em sala de aula, como os alunos tiveram dificuldades em definir o que poderiam estudar com aqueles dados que haviam coletado, enquanto aguardam a professora finalizar atendimento a outros grupos, conversam sobre outros assuntos, como a resolução de uma lista de exercícios a ser entregue em outra disciplina do curso. Quando a professora se aproxima, retomam a abordagem solicitando o seu atendimento, conforme transcrição de conversa:

A12: Professora, a gente não sabe o que fazer com esses valores.

Prof: Do que se trata?

[os alunos explicam a situação e a coleta de dados]

Prof: Vocês fotografaram essa garagem e o termômetro que utilizaram?

A14: A gente não fotografou nada, mas a garagem é do tamanho que a A12 falou e o termômetro é aquele de mercúrio, sabe? De madeira. Deixamos pendurado na parede da garagem e íamos medindo e medindo conforme passava o tempo.

Prof: E com esses dados, o que pretendem estudar?

A13: A gente quer calcular a derivada [risos]

A14: Para de rir A13, vamos fazer o trabalho aqui. Pode ser professora?

Prof: E o que vocês precisam para calcular a derivada?

A11: Não é a função?

A14: É mesmo, vamos fazer a função nesse software Curve e calcular a derivada.

Prof: Já que vocês não têm fotos da coleta de dados, anotem essas considerações que vocês estão fazendo para a situação-problema e definam o problema.

Diante da solicitação da professora, para representar a situação que coletaram dados, o grupo a descreve de acordo com as informações sobre a garagem (Figura 18), pois os dados eles tinham registrado no Excel. Com essas informações, a situação-problema apresenta informações necessárias para a definição de um problema a ser estudado.

Variação da temperatura de um ambiente durante um período de 8 horas (início às 10h00 am e término às 18h00 pm)

Para obter os dados desta atividade foram necessários coletar a variação de temperatura a cada 40 minutos em um período de 8 horas, o ambiente escolhido foi uma garagem coberta com 2,00 metros de largura por 2,20 de comprimento.

Figura 18: Descrição da situação

Fonte: Relatório dos alunos.

Embora os alunos tenham em mãos informações necessárias para descrever um problema a ser estudado, optam por realizar o cálculo da taxa de variação da temperatura em função do tempo, assunto estudado em aula anterior ao desenvolvimento da atividade. Para tanto, o grupo necessitou de uma representação algébrica do comportamento da temperatura para, posteriormente determinarem a taxa de variação. Embora os alunos não tenham explicitado o problema a ser estudado, consideramos que o critério *O problema está claramente definido a partir da descrição da situação-problema*, é o mais adequado para avaliar a discussão dos alunos. Entendemos que é preciso fazer um ajuste na escala de avaliação para considerar um item que trata da existência de um problema definido, mas não registrado pelos alunos. Para obter a representação algébrica que descreve o comportamento dos dados, os alunos utilizaram o software Curve Expert, obtendo $Y(x) = 31,8 + 4,1 \cos(5,83x - 2,01)$ em que Y representa a temperatura da garagem (em graus Celsius) em função do tempo x , em minutos, conforme consta na Figura 19. Notamos que os alunos deixaram explícito o domínio que consideraram para representar a situação.

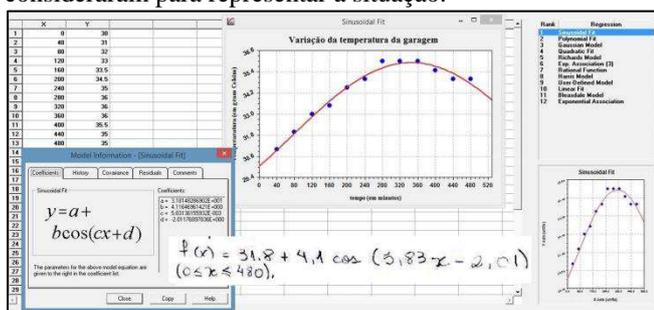


Figura 19: Modelo matemático mediado pelo software Curve Expert

Fonte: Relatório dos alunos.

Ao serem questionados sobre a escolha do modelo para representar a situação, bem como da indicação do domínio, os alunos justificaram que:

A14: Foi a primeira função aí do Curve.

A12: Foi a primeira função que o curve nos deu e também a gente sabe que vale para esse período de tempo, que é o domínio!

Prof: Mas por que uma função cosseno?

A14: Foi isso, a primeira função do software.

Prof: E vocês acreditam no que o software dá?

A11: Acreditamos duvidando professora. Porque a gente quer a função e cosseno é função.

Prof: E qual característica dessa função está relacionada com a situação?

A11: Daí... é é é. Bom a temperatura sobe e desce e essa curva sobe e desce!

Prof: E o que é esse sobe e desce?

[risos]

Prof: Gente, é sério! A função cosseno é uma função periódica e o dia é uma função periódica?

[alunos ficam olhando para a professora com expressão de dúvida]

A11: Professora a gente sabe o comportamento, pode deixar.

Os integrantes de G3 findam a abordagem que a professora os fez afirmando que *a gente sabe o comportamento, pode deixar* (argumento de A11). No entanto, o que fica explícito por meio das indagações com a professora é que o grupo *expressa apenas um modelo matemático que não representa a situação-problema* no sentido em que não há uma hipótese que sustente que a temperatura é uma função periódica atrelada ao fato de que a ocorrência de um dia pode ser representado por meio de uma função periódica. Com isso, o grupo *não interpreta os resultados obtidos com a situação-problema, aceitando quaisquer resultados encontrados*. Essa inferência é sustentada pelos argumentos utilizados: *Foi a primeira função aí do Curve* (argumento de A14); *Foi a primeira função que o curve nos deu e também a gente sabe que vale para esse período de tempo, que é o domínio!* (argumento de A12); *Porque a gente quer a função e cosseno é função* (argumento de A11).

Além disso, o grupo *apresenta algumas falhas nos raciocínios usados e na seleção dos procedimentos de resolução dos cálculos solicitados*, bem como *desiste facilmente ao encontrar dificuldades*, aceitando os resultados apresentados pelo software sem ao menos questionar, *percebendo que os métodos utilizados não são adequados*. No caso desse grupo, não há uma proposta de outros métodos de resolução.

Como consideram, sem apresentar argumentos que sustentam a escolha, que o modelo matemático obtido por meio do software representa a situação, G3, com o auxílio do Excel *apresenta a validação dos dados por meio da comparação dos resultados calculados pelo modelo matemático deduzido com os dados coletados empiricamente*, conforme Figura 20.

	A	B	C
1	0	30	30,0566
2	40	31	32,94464
3	80	32	35,26125
4	120	33	35,84994
5	160	33.5	34,41682
6	200	34.5	31,67734
7	240	35	28,99909
8	280	36	27,71911
9	320	36	28,47639
10	360	36	30,89287
11	400	35.5	33,76222
12	440	35	35,65198
13	480	35	35,61877
14			

Figura 20: Validação do modelo matemático
Fonte: Relatório dos alunos.

Os alunos finalizam a atividade com a validação do modelo matemático e não retoma o problema *não apresentando solução alguma*. Quando questionados em entrevista posterior, um dos integrantes do grupo afirma:

A14: *A gente gastou um tempão discutindo como usar o Curve, porque faltei naquela sua aula e eles nem sabiam me explicar. O A3 que era de outro grupo me ajudou a entender um pouco. Daí usamos aquela função lá... periódica... como é o nome?*

Prof: *Vocês consideraram a função cosseno.*

A14: *Isso, mas nem sei. Daí o pessoal do grupo foi saindo, a senhora disse que era para anotar e salvar e salvamos o que deu.*

Prof: *Olhe bem A14... vocês disseram que estudariam a taxa de variação da temperatura em função do tempo!*

A14: *Foi isso que a gente pensou por causa da aula de derivada, mas nem sabemos calcular essa derivada!*

Prof: *Por que não me chamaram?*

A14: *Ai professora, a senhora estava atendendo um monte de gente que ficava chamando e como nosso grupo ficou lá no canto, parece que nem dava para a senhora chegar!*

Embora o aluno A14 utilize argumentos para justificar a não finalização da atividade em momento algum sugeriu de refazê-la ou mesmo buscar esclarecer possíveis dúvidas. Os outros integrantes do grupo não quiseram conversar sobre o que fizeram. Nesse sentido, ao avaliarmos a atividade de modelagem matemática desenvolvida por G3 segundo as fases, a nota obtida foi 10 pontos, conforme consta no Quadro 7.

Quadro 7: Avaliação da atividade de modelagem matemática desenvolvida por G3

INTEIRAÇÃO	Descrição da situação-problema	
	2	É possível identificar a situação-problema; apresenta informações necessárias para a definição de um problema a ser estudado.
INTEIRAÇÃO	Definição do problema a ser estudado	
	2	O problema está claramente definido a partir da descrição da situação-problema.
MATEMATIZAÇÃO E RESOLUÇÃO	Dedução do modelo matemático	
	2	Expressa apenas um modelo matemático que não representa a situação-problema.
	Resultados matemáticos	
	Explicação de procedimentos	
	1	Apresenta algumas falhas nos raciocínios usados e na seleção dos procedimentos de resolução dos cálculos solicitados.
	Persistência na resolução	
0	Não realiza os cálculos solicitados ou desiste facilmente ao encontrar dificuldades.	
Flexibilidade na resolução		

	1	Percebe que os métodos utilizados não são adequados e propõe outros métodos não-adequados de resolução dos cálculos solicitados.
INTERPRETAÇÃO E VALIDAÇÃO	Interpretação dos resultados	
	0	Não interpreta os resultados obtidos com a situação-problema, aceitando quaisquer resultados encontrados.
	Validação	
	2	Apresenta a validação dos dados por meio da comparação dos resultados calculados pelo modelo matemático deduzido com os dados coletados empiricamente.
Solução para o problema		
	0	Não apresenta solução alguma.

Fonte: Construído pelos autores.

5. Discussão e implicações para a pesquisa

A partir da estratégia de avaliação construída segundo a escala holística focada proposta por Charles, Lester & O'Daffer (apud Ponte et al. 1997) pudemos realizar uma avaliação tanto qualitativa quanto quantitativa das atividades de modelagem matemática desenvolvidas em sala de aula. Qualitativa no sentido de considerar os encaminhamentos dos alunos segundo as fases da modelagem matemática (Almeida; Silva & Vertuan, 2012) em que os argumentos apresentados pelos grupos fizeram parte da indicação de uma pontuação (quantitativa).

Inspirados na escala holística focada, elaboramos com antecedência os critérios para avaliar a atividade de modelagem matemática que foram validados pelos alunos antes de serem aplicados. Como essa pontuação era do conhecimento dos alunos, esses a consultava para identificar se todas as ações avaliadas estavam presentes em suas discussões. Isso explicita de que maneira a atividade será avaliada, gerando a nota. Com isso, os alunos desenvolvem a atividade cientes de ações que serão avaliadas.

De posse da escada elaborada, o professor tem acesso ao que deve ser considerado, proporcionando um caráter objetivo na avaliação. Além disso, concentra seus questionamentos e observações em ações que estão sendo levadas em consideração na pontuação. Para isso, além da produção escrita, outras se fazem necessárias, como registros de imagens e áudio dos alunos.

Como a estratégia foi definida anteriormente ao desenvolvimento da atividade em sala de aula, alguns ajustes se fazem necessários para que um refinamento na pontuação e nos itens avaliados sejam feitos. Na pesquisa realizada, durante o uso da estratégia de avaliação, identificamos que a situação proposta pelo grupo G3 gera um problema, mas que não foi expresso de forma explícita, somente nas suas argumentações. Para não prejudicar a avaliação do grupo, atribuímos pontuação máxima para o item destacando que o problema foi apresentado. Consideramos que é importante, em uma atividade de modelagem, avaliar a capacidade de expressar de forma explícita um problema a ser investigado. Nesse sentido, esse critério teria de ser considerado no item *definição do problema a ser estudado*.

Como a escala holística foi construída para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem em que a temática foi sugerida em conjunto professora e todos os alunos da sala, o critério que se refere à criatividade da escolha da situação na fase de interação não foi considerado. No entanto, a criatividade, como apontada na literatura referente à modelagem matemática, é um encaminhamento importante de ser investigado. Nesse sentido, consideramos que a escolha do tema na fase de interação precisa ser avaliada quando não sugerido por integrantes externos ao grupo.

Embora exista a necessidade de ajustes na escala holística, é importante que destaquemos a praticidade de seu uso na avaliação de atividades de modelagem matemática realizadas em grupos em um ambiente educativo, no caso a sala de aula, em que os critérios foram previamente definidos e apresentados aos alunos.

O que evidenciamos com a pesquisa realizada é que avaliar atividades de modelagem matemática pode ser um procedimento realizado por meio da construção de uma estratégia inspirada na escala holística. Além disso, tal escala pode ser ajustada segundo os encaminhamentos propostos para as atividades de modelagem. Nesse sentido, estamos inserindo esforços na construção de uma escala para avaliar atividades de modelagem matemática em que os alunos, reunidos em grupos e com a orientação do professor, são responsáveis pela condução da atividade, cabendo a eles a identificação de uma situação problemática a ser investigada, a coleta de dados, as transições de linguagem, a identificação de conceitos matemáticos a serem utilizados, a obtenção e validação do modelo matemático e seu uso para a análise da situação, conferindo uma solução para a mesma.

REFERÊNCIAS

Almeida, L. M. W.; & Brito, D. S. (2005). Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?. *Ciência e Educação*. 11(1), 1-16.

Almeida, L. M. W., & Silva, K. A. P. (2012). Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os modos de inferência. *Ciência & Educação*. 18(3), 623-642.

Almeida, L. M. W., Silva, K. A. P., & Vertuan, R. E. (2012). *Modelagem Matemática na educação básica*. São Paulo: Contexto.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto.

Borba, M. C., Meneghetti, R. C. G., & Hermimi, H. A. (1999). Estabelecendo critérios para avaliação do uso de modelagem em sala de aula: estudo de um caso em um curso de ciências biológicas. In M. C. Borba (Ed.). *Calculadoras Gráficas e Educação Matemática* (pp. 95-114). Rio de Janeiro, Brasil: MEM/USU, Ed. Art Bureau.

Borges, A. T. (2002). Novos rumos para o laboratório escolar de Ciências. *Cad. Brás. Ens. Fís.*, 19(3), 291-313.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik – ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 86-95.

Buriasco, R. L. C. (1999). *Avaliação em Matemática: um estudo das respostas de alunos e professores* (Tese de doutorado). Universidade Estadual Paulista, Marília.

Figueiredo, D. F. (2013). *Uma proposta de avaliação de aprendizagem significativa em atividades de modelagem matemática na sala de aula*. (Dissertação de mestrado). Universidade Estadual de Maringá, Maringá.

Figueiredo, D. F., & Kato, L. A. (2012). Uma Proposta de Avaliação de Aprendizagem em Atividades de Modelagem Matemática na Sala de Aula. *Acta Scientiae*. 14(2), 276-294.

Garnica, A. V. M. (2004). História Oral e Educação Matemática. In M. C. Borba, & J. L. Araujo (Ed.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática* (pp. 77-98). Belo Horizonte, Brasil: Autêntica.

Greefrath, G. (2015). Problem Solving Methods for Mathematical Modelling. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences* (pp. 173–183). Cham, Switzerland: Springer.

Hadji, C. (1994). *Avaliação, regras do jogo: das intenções aos instrumentos*. Porto: Porto Editora LDA.

Kaiser, G. & Brand, S. (2015). Modeling Competencies: past development and further perspectives. In G. A. Stillman, W. Blum & M. S. Biembengut (ed). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice* (p. 129-146). New York: Springer.

Ponte, J. P.; Boavida, A.; Graça, M.; Abrantes, P. (1997) *Didáctica da Matemática*. Lisboa: DES do ME.

Sacristán, J. G. (1998). A avaliação no ensino. In: J. G. Sacristán & A. I. Pérez Gomes (Ed.). *Compreender e transformar o ensino* (pp. 295-351). Porto Alegre, Brasil: Artmed.

Sekerák, J. (2010). Phases of mathematical modelling and competence of high school students. *The Teaching of Mathematics*, 2, 105–112.

Stillman, G., Brown, J., & Galbraith, P. (2010). Identifying challenges within transition phases of mathematical modeling activities at year 9. In R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 385–398). New York: Springer.

Stillman, G. A, Brown, J. P, & Geiger, V. (2015). Facilitating Mathematisation in Modelling by Beginning Modellers in Secondary School. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences* (pp. 93–104). Cham, Switzerland: Springer.

Veleda, G. G. & Burak. D. (2016). Modelagem Matemática e o Desafio da Avaliação: revisitando as propostas nacionais e internacionais. In L. M. W. Almeida, A. H. Borssoi, E. Tortola, K. A. P. Silva (Eds.). *Modelagem Matemática em debate: diálogos, reflexões e desafios*. EPMEM 7. Londrina: UEL, UTFPR.

Vianna, H. M. (1989) *Introdução à avaliação educacional*. São Paulo: IBRASA.

Karina Alessandra Pessoa da Silva

Professora da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Londrina, atuando nos cursos de Licenciatura em Química e Engenharia de Produção e no Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGMAT). Graduada em Matemática (Licenciatura) pela Universidade Estadual de Londrina (2000). Especialista em Educação Matemática pela UEL (2007). Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL (2008). Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (2013). Tem experiência na área de Educação Matemática com ênfase em Ensino e Aprendizagem da Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Modelagem Matemática, Semiótica Peirceana, Registros de Representação Semiótica e Livro Didático. Faz parte do GRUPEMMAT - Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática da UEL desde 2005. É uma das coordenadoras do Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelagem, Investigação e Tecnologia (GEPMIT) / UTFPR. Trabalhou por 10 anos com preparação e elaboração de obras didáticas de Matemática e de Ciências Naturais do Ensino Fundamental. Atualmente é tesoureira da Sociedade Brasileira de Educação Matemática Regional Paraná.